MatemaTics para Ingeniería

MatemaTics para ingeniería
©Autores: Carlos Espinosa, Byron Viteri
Fecha de publicación: enero del 2019
ISBN: 978-9942-8727-3-9
Pares revisores académicos:
Ing. Clara Sánchez Benítez, Mgs, Universidad Técnica de Ambato.
Ing. Manolo Muñoz Espinoza, Mgs, Universidad Técnica de Ambato.

Editor: Ing. Hugo Arias Flores, MBA.

Corrección, diseño e impresión: Editorial El Conejo
Av. 6 de Diciembre N26-97 y la Niña, piso 3
Telf: 22 27 948/ 22 27 949
Fax: 2 501 066
info@editorialelconejo.com
www.editorialelconejo.com

Editorial de la Universidad Tecnológica Indoamérica. Quito-Ecuador

UNIVERSIDAD INDOAMÉRICA
Vive la Excelencia

Cómo citar este libro:
Espinosa, C., Viteri, B. (2019). *MatemaTics para ingeniería,* Quito, Ecuador: Universidad Tecnológica Indoamérica.

MatemaTics para Ingeniería

Carlos Espinosa
Byron Viteri

El hombre que hace que las cosas difíciles
parezcan fáciles es el educador

Ralph Waldo Emerson

Acerca de los Autores

Carlos Alberto Espinosa Pinos

Docente a tiempo completo de la Facultad de Ingeniería y Tecnologías de la Información y la Comunicación en la Universidad Tecnológica Indoamérica. Tiene una licenciatura en Sistemas Computacionales, una ingeniería en Empresas, y una maestría en Docencia Matemática. Su línea de investigación es la aplicación en análisis de regresión. Con más de 12 años en experiencia de docencia a nivel medio, tecnológico y superior, ha dictado cursos a nivel tanto de pregrado como posgrado. Ha realizado actividades de asesoría en el ámbito comercial e informático por más de 5 años.

Contactos: carlosespinosa@uti.edu.ec
carlos_pinos31@yahoo.es

Byron Aníbal Viteri Briones
Docente a tiempo completo de la Facultad de Ingeniería y Tecnologías de la Información y la Comunicación en la Universidad Tecnológica Indoamérica. Ha trabajado en diferentes niveles educativos por más de 30 años, fundamentalmente en el nivel superior en las áreas de las Matemáticas. Posee una licenciatura en la especialización de Física y Matemática, una maestría en Docencia Universitaria y Gerencia Educativa; lo cual le permite desarrollar varias temáticas investigativas en la didáctica de la matemática, para ser aplicadas fundamentalmente a nivel de Ingenierías.

Contactos byronviteri@uti.edu.ec
byronbriones541@gmail.com

Resumen curricular

Dentro del ciclo de formación básica de los ingenieros, aparece la matemática como una disciplina básica que contribuye a completar, en cierta medida, el sistema de conocimientos profundos que necesita el futuro ingeniero para fundamentar los modelos matemáticos que se presentan al momento de resolver problemas ingenieriles.

Además, la matemática desarrolla el pensamiento lógico-deductivo, la formación lingüística, las operaciones mentales generales (como el análisis, la síntesis, la generalización y la abstracción), así como el pensamiento heurístico y creativo. Sin embargo, la matemática, en los diferentes niveles de enseñanza, y no queda excepto de ello el nivel superior, es un proceso complejo tanto para enseñarla –tarea de los profesores–, como para aprenderla por parte de los estudiantes.

Resumen

En la formación básica de los profesionales relacionados con la ingeniería, se encuentra la matemática superior como una de sus disciplinas; pero son muy discutidas las dificultades que afronta esta disciplina en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Es por ello por lo que los profesores quisieron desarrollar un libro que contribuya al "perfeccionamiento del proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática en las carreras de ingeniería". El objetivo de este trabajo es presentar los resultados del proyecto y la implementación de una estrategia didáctica que se centre en las estrategias de aprendizaje para el desarrollo de habilidades matemáticas.

La matemática utiliza un lenguaje riguroso con el que puede expresarse de manera precisa, clara y desprovista de ambigüedades e inconsistencias, las relaciones internas de las teorías que tratan acerca de la naturaleza, de la sociedad y del comportamiento del individuo.

La matemática tiene como finalidad el estudio de las estructuras más generales del pensamiento lógico. Son características de esta su poder de análisis y síntesis, la riqueza en conceptos, procesos y múltiples herramientas que puedan aplicarse a disciplinas tan diversas como las ingenierías, las ciencias naturales e, inclusive, el arte, etc.

Presentación

Este libro ha sido elaborado a partir de las notas del primer nivel de matemática impartido por los autores para los estudiantes del primer nivel de Ingenierías de la Universidad Tecnológica Indoamérica. El contenido cubre la malla curricular de la asignatura de Matemáticas común, desde la titulación de Ingenieros Industriales hasta los Ingenieros en Ciencias de la Computación, que ofrece actualmente la Universidad. Puesto que esta materia pertenece al tronco común para todos los planes de estudio dentro de la Ingeniería reconocidos oficialmente, este libro es potencialmente útil dentro del primer nivel.

La concepción del texto estuvo orientado para servir de guía a los estudiantes del primer nivel de las Ingenierías, y esto se lo ha determinado por la selección del material y la forma de la exposición. Se ha perseguido un estilo claro, detallado y pedagógico, incluyendo ejemplos y ejercicios en cada uno de sus capítulos.

Finalmente, este libro es el resultado del curso de varios semestres, con varias horas semanales de matemática para estudiantes del primer año. El libro está pensado, por una parte, para seguir este curso, pero también para que un estudiante de primer año pueda estudiarlo por sí mismo.

Índice

Introducción

El presente libro es una referencia actualizada y completa, en un formato útil, que ofrece una visión general sobre los conceptos de las matemáticas, con gran variedad de ejercicios a través de los cuales el lector puede comprobar su progreso por medio de las propuestas de solución aquí expuestas. Las relaciones complejas se explican con sencillez y claridad a partir de los ejemplos.

De igual manera, este libro trata de ser un puente entre la enseñanza media y superior. Nuestra intención al escribir estas páginas es la de proporcionar al estudiante los conocimientos básicos para seguir el primer nivel de una carrera técnica como es la de las ingenierías. También puede ser utilizado como libro de texto en un curso elemental de Cálculo en las distintas Escuelas Universitarias de Ingeniería.

Capítulo I

Fundamentos matemáticos

- Propiedades de los números reales, propiedades de los negativos
- La recta numérica, conjuntos e intervalos
- Valor absoluto y distancia
- Exponentes enteros, exponente cero y negativo
- Leyes de los exponentes
- Notación científica
- Exponentes racionales
- Racionalización

Propiedades de los números reales

Los números reales cumplen con las siguientes propiedades:

Cerradura o Clausurativa

Esta propiedad establece que la suma de dos números reales es otro número real.

Adición	**Producto**
$a + b \in \mathbb{R}$	$a \, . \, b \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

$27 + 16 = 43$	$12 . 4 = 48$
$2/3 + 2 = 8/3$	$3/7 . 5/2 = 15/14$
$144 + 133 = 277$	$80 . 53 = 4240$

Conmutativa

Esta propiedad nos indica que el orden de los sumandos o factores no altera la suma o producto total.

Adición	**Producto**
$a + b = b + a \in \mathbb{R}$	$a \, . \, b = b.a \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

$8 + 3 = 3 + 8$	$\sqrt{7} \, . \, \sqrt{5} = \sqrt{5} \, . \, \sqrt{7}$
$11 = 11$	$\sqrt{35} = \sqrt{35}$

$$14 - 20 = -20 + 14 \qquad \sqrt{3} \,.\, \sqrt{11} = \sqrt{11} \,.\, \sqrt{3}$$

$$-6 = -6 \qquad \sqrt{33} = \sqrt{33}$$

Asociativa

De cualquier manera que se asocien los sumandos o factores, el resultado se mantiene.

Adición	**Producto**
$a + (b + c) = (a + b) + c \in \mathbb{R}$	$a(b \,.c) = (a \,.\, b) \,.\, c \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

$2 + (7 + 8) = (2 + 7) + 8$	$2/3\ (5.1/7) = (2/3.5)\ .1/7$
$2 + (15) \quad = (9) + 8$	$2/3\ (5/7) \quad = (10/3).1/7$
$17 = 17$	$10/21 = 10/21$
$12 + (17 + 9) = (12 + 17) + 9$	$5.\ (3.2) \quad = (5.3)\ .2$
$12 + (26) \quad = (29) + 9$	$5.\ (6) \quad = (15)\ .2$
$28 = 38$	$30 = 30$

Distributiva

El factor afecta a cada uno de los términos de los sumandos del polinomio.

$$a\,(b + c - d) = a(b) + a(c) - a(d) \in \mathbb{R}$$

es.symbolab.com

Ejemplos:

$$7(3 + 9 - 8) = 7(3) + 7(9) + 7(-8) = 21 + 63 - 56 = 28$$

$$\tfrac{1}{2}(4 - 8 + 10 - 14) = \tfrac{1}{2}(4) - \tfrac{1}{2}(8) + 1/2(10) - 1/2(14) = 2 - 4 + 5 - 7 = -4$$

Identidad

La propiedad de identidad o modulativa establece que al sumar o multiplicar por su módulo correspondiente, obtenemos como resultado una misma cantidad.

Adición	**Producto**
$a + 0 = a \quad \in \mathbb{R}$	$a.1 = \quad a \in \mathbb{R}$

Ejemplos:

$27 + 0 = 27$	$77.\ 1 = 77$
$2/3 + 0 = 2/3$	$\sqrt{77}\ .\ 1 = \sqrt{77}$

Inverso

Al sumar un número real con su inverso tendremos como resultado cero, y al multiplicar obtendremos la unidad.

Adición	**Producto**
$a + (-a) = 0$	$a.\ 1/a = 1$

Ejemplos:

$\sqrt[3]{127} + (-\sqrt[3]{127}) = 0$	$3/7\ .7/3 = 1$
$-437 + 437 \quad = 0$	$89\ .1/89 = 1$

Ejercicios de aplicación

1. $2/3 - 8/5 + 18$
   soluc. $\frac{256}{15}$

2. 421 -335 + 768 -12589 + 6985 -1879 + 9865 soluc.3236

3. $7\frac{1}{6} - 3\frac{2}{3} + 4\frac{5}{2} - 6\frac{3}{4} + 5\frac{2}{5} - 17$ soluc. $-\frac{1}{4}$

4. 26,58+78,56–128,59+39,65-127,89-428,56+2569 soluc.2028.75

5. $3/5 + 7\frac{2}{3} - 8/5 + 4\frac{3}{8} - 10\frac{4}{7} + 11$ soluc. $\frac{1927}{168}$

6. $2\sqrt{3} - 18\sqrt{5} + 21\sqrt{6} - 17\sqrt{3} + 28\sqrt{6} + 14\sqrt{5}$
   soluc. $-15\sqrt[2]{3} - 4\sqrt[2]{5} + 49\sqrt[2]{6}$

7. $3\sqrt[3]{7} + 25\sqrt[3]{17} - 32\sqrt[3]{7} + 18\sqrt[3]{17} + 21\sqrt{77} + \sqrt[3]{7}$
   soluc. $-28\sqrt[3]{7} + 43\sqrt[3]{17} + 21\sqrt[2]{77}$

8. $2\sqrt{5} + 3\sqrt{21} - 17\sqrt{5} + 23\sqrt{21} - 21\sqrt{5} + 33\sqrt{21}$
   soluc. $-36\sqrt[2]{5} + 59\sqrt[2]{21}$

9. $3/2\,\pi + 3/4\,\pi - 7/8\,\pi + 13/5\,e - 12\,e$ soluc. $\frac{11}{8}\pi - \frac{47}{5}e$

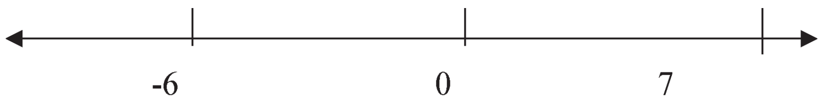
10. $4\sqrt[3]{e} + 8/3\sqrt[3]{3}$ soluc. $\frac{20}{3}\sqrt[3]{3}$

La recta numérica

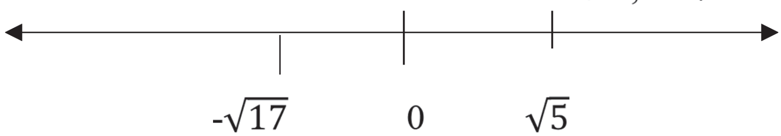
Es un gráfico unidimensional, que se encuentra estructurado en una línea recta en la que los números reales son mostrados como puntos especialmente marcados.

Ejemplos:

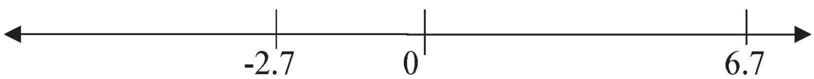
Graficar en la recta numérica 7, -6



Graficar en la recta numérica $\sqrt{5}$, $-\sqrt{17}$



Graficar en la recta numérica 6,7; - 2.7



Ejercicios de aplicación

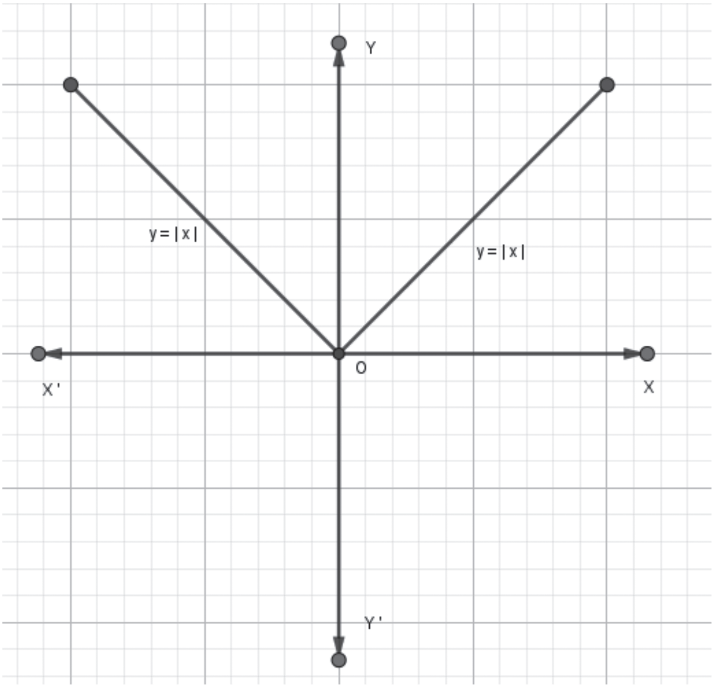
Representar en la recta numérica

1. 20, -10
2. $\sqrt{37}$, $-\sqrt{17}$
3. 10,5; -5,9
4. 5/3, -11/7
5. 2 $\sqrt{7}$, -4 $\sqrt{5}$
6. 35700, 86500
7. 334,86, -789,25
8. -3 $\sqrt{23}$, 4$\sqrt{17}$
9. 10/7, -31/7
10. 7 $\sqrt{23}$, - 8$\sqrt{21}$

Valor absoluto y distancia

El valor absoluto de un número real es su valor numérico sin tener en cuenta el signo positivo o negativo.

El valor absoluto está relacionado con las nociones de magnitud, distancia y norma en diferentes contextos matemáticos y físicos.



Ejemplos:

$$|258| - |-3275| + |-8965| - |-9865| + |-13475| - |76359| =$$

$$258 - 3275 + 8965 - 9865 + 13475 - 76359 = -66801$$

$$\left|-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\right| - \left|-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right| + \left|-\frac{2}{5}+2\right| - \left|-3+\frac{1}{2}\right| =$$

$$\frac{1}{15} - \frac{1}{4} + \frac{8}{5} - \frac{5}{2} = -\frac{13}{12}$$

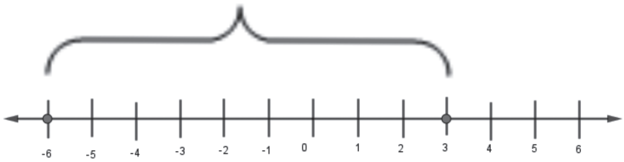
Aplicaciones con valor absoluto

Ejercicio 1:

Selecciona la recta numérica que coincida con la expresión |-6-(-3)|

a)

b)



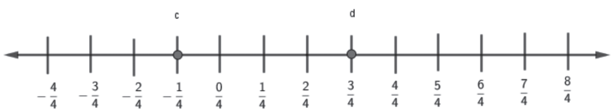
Solución:

Resolviendo la expresión dada |-6-(-3)| = |-6+3| = |-3| = 3

Por lo tanto, la solución es la a, porque es la única recta que hace referencia a una distancia de 3 unidades.

Ejercicio 2:

¿Cuáles de las siguientes expresiones representan la distancia entre *c* y *d*?



a) $\left|-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right|$

b) $\left|-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\right|$

Solución: la expresión que nos indica una sumatoria es la opción b.

Ejercicios de aplicación:

1. $|-9635|+|-6359|-|-896567|-|5896|-|-12675|$ sol: -899144

2. $|12645|-|-6475|+|-96358|-|-86574|+|3256|$ sol: 19210

3. $\left|\frac{1}{5}-3\right|+\left|-2-\frac{2}{3}\right|-\left|4-\frac{3}{5}\right|-\left|5-\frac{7}{2}\right|$ sol: 17/30

4. $|-5\sqrt{3}|-|-14\sqrt{2}|+|-35\sqrt{3}|-|-67\sqrt{3}|$ sol: $-27\sqrt{3}-14\sqrt{2}$

5. $|23e|-|73e|-|-85e|-|-97e|+|-765e|+|-865e|$ sol: 1398 e

6. $\left|\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right|-\left|-\frac{5}{7}+\frac{3}{2}\right|-\left|-\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\right|-\left|-2-\frac{1}{4}\right|$ sol: $-\frac{377}{168}$

7. $|\sqrt[3]{7}|-|-23\sqrt[3]{7}|+|-81\sqrt{23}|-|-47\sqrt{23}|-|-56\sqrt[3]{7}|$ sol: $-78\sqrt[3]{7}+34\sqrt{23}$

8. $|32\pi| - |-777\pi| + |-12535\pi| - |-3245\pi + 327\pi|$ sol: 8872π

9. $\left|\frac{3}{2} - 5\right| + \left|-\frac{7}{3} + 2\right| - \left|\frac{4}{3} - 1\right| + \left|-3 + \frac{4}{5}\right|$ sol: $\frac{57}{10}$

10. $\left|2 - \frac{3}{4}\right| - \left|4 - \frac{3}{7}\right| + \left|-10 + \frac{3}{2}\right|$ sol: $\frac{173}{28}$

Conjuntos

Un conjunto está determinado por aquellos elementos que tienen una cierta característica.

Ejemplos:

A = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

B = {  ,  ,  }

C = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 ,19}

Dentro del estudio de los conjuntos podemos establecer las siguientes formas operacionales:

Unión

La unión de conjuntos está formada por todos los elementos que forman los conjuntos dados.

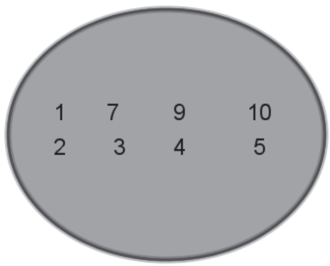
Ejemplo:

Dados los conjuntos: A = {1, 2, 3, 4, 5}

B = {7, 9, 10}

Calcular

A U B = {1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10}



A ∪ B

Intersección

La intersección de los conjuntos está constituida por los elementos comunes que existen entre ellos.

Ejemplo

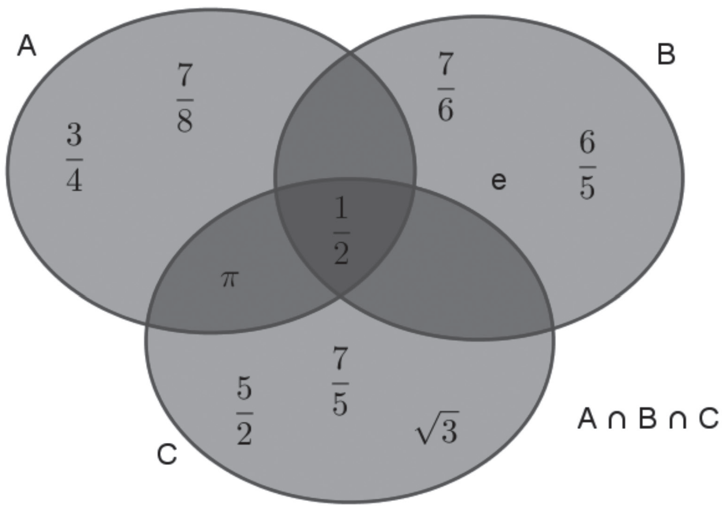
Dados los conjuntos: $A = \{ \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 7/8, \pi \}$

$B = \{\frac{1}{2}, 7/6, 6/5, e\}$

$C = \{ 5/2, 7/5, 1/2, \sqrt{3}, \pi \}$

Calcular

$A \cap B \cap C = \{ \frac{1}{2} \}$



Diferencia de Conjuntos

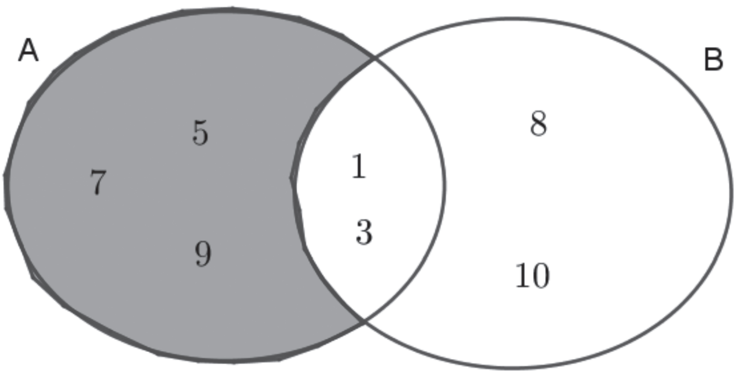
La diferencia de conjuntos se encuentra dada por los elementos que están en el primer conjunto y no en el segundo conjunto.

Ejemplo

Dados los conjuntos: A = {1,3,5,7,9}

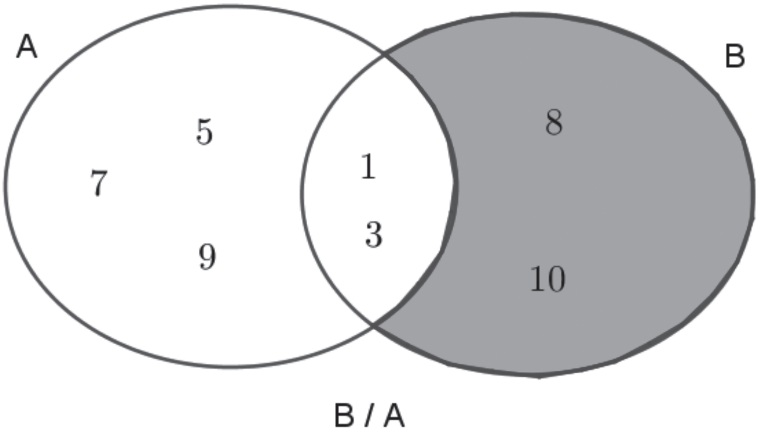
B = {1,3,8,10}

A/B = {5,7,9}



A / B

B/A = {8 ,10}



Complemento de un conjunto

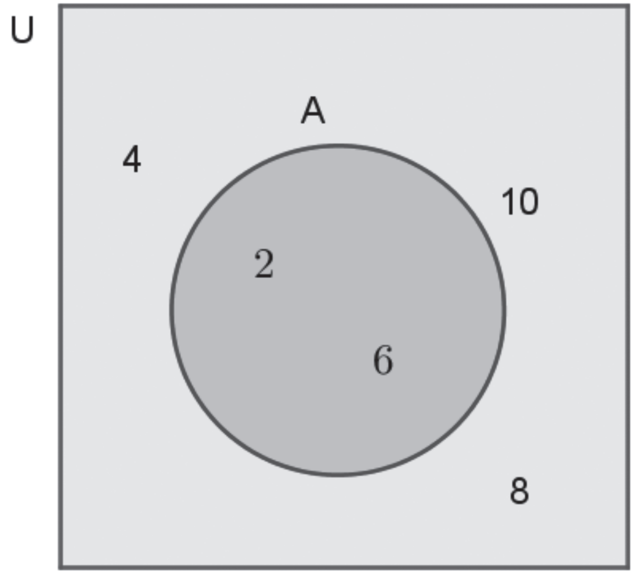
Son los elementos que le faltan al subconjunto para ser igual al conjunto universo.

Ejemplo:

Dado U = {2,4,6,8,10}

A = {2,6}

Encontrar: A^c



A^c

EJERCICIO 1

Dados los conjuntos:

U= Universo= {-13, -6, -2,-1, 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 17}

A= {-6, -2, -1, 0, 2, 3, 5, 8}

B= {-2, 3, 4, 6, 7, 9, 10}

C= {0, 12, -13, 7, 17}

Determinar: $[C/(A \cup B)^c] \cup (A \cap C)$

Solución:

Resolver por partes y de adentro hacia afuera

$$\underbrace{\underbrace{[C/\underbrace{(\underbrace{A \cup B}_{1})^c}_{2}]}_{3} \cup \underbrace{(A \cap C)}_{4}}_{5}$$

Parte 1: $\underbrace{(A \cup B)}_{1} = \{-6,-2,-1,0,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

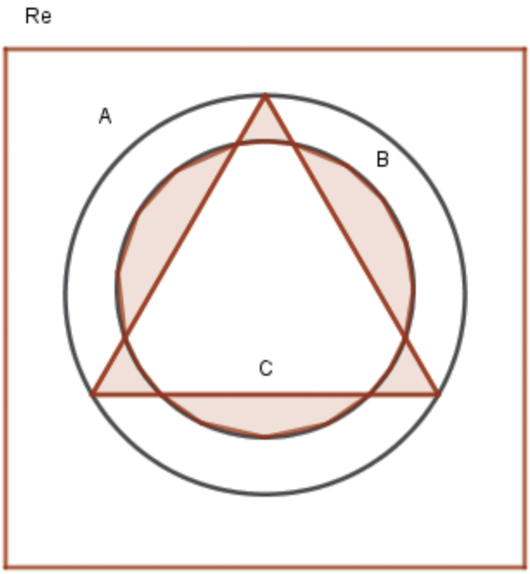
Parte 2: $\underbrace{(A \cup B)^c}_{2} = \{-13, 12, 17\}$

Parte 3: $\underbrace{C/(A \cup B)^c}_{3} = \{0, 7\}$

Parte 4: $\underbrace{(A \cap C)}_{4} = \{0\}$

Parte 5: $\underbrace{[C/(A \cup B)^c] \cup (A \cap C)}_{5} = \{0,7\}$

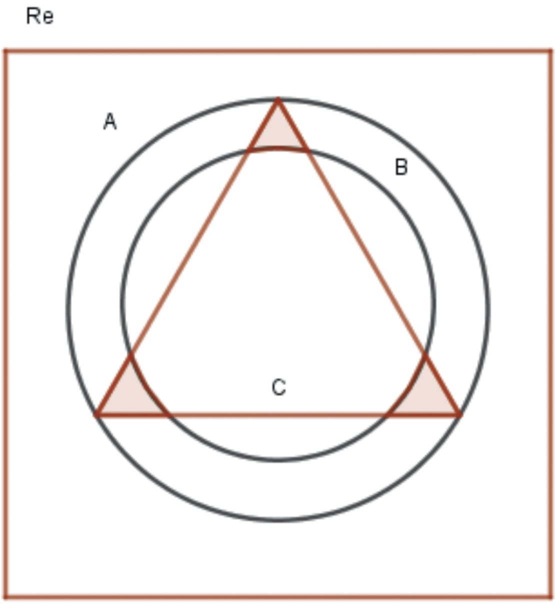
EJERCICIO 2



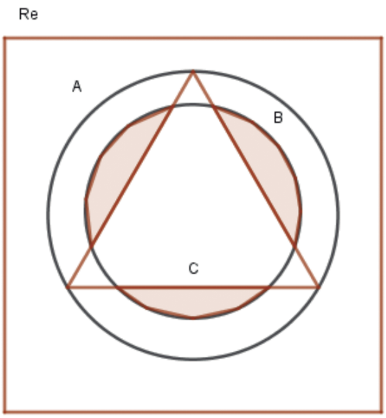
En el diagrama de Venn, el conjunto A está dado por el círculo externo, el conjunto B está dado por el círculo interno y el conjunto C está dado por el triángulo. Determina qué conjunto representa la región sombreada.

Solución:

La primera parte del conjunto solicitado la constituye el conjunto $(A \cap B^c) \cap C$, tal como muestra la siguiente figura:



La segunda parte del conjunto solicitado la constituye el conjunto $(B \cap C^c)$, el cual se representa en el siguiente diagrama:



A partir de los diagramas anteriores se puede concluir que la región sombreada requerida puede ser representada por la siguiente operación entre conjuntos:

$$[(A \cap B^c) \cap C] \cup (B \cap C^c)$$

Intervalos

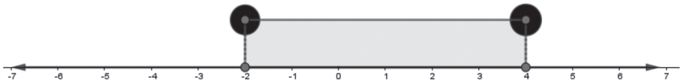
Un intervalo es un conjunto de números formado por el subconjunto de los números reales, a los cuales se los puede representar en la recta numérica.

Dentro del estudio de los intervalos se presentan los siguientes:

Intervalo Cerrado

Es aquel que incluye los dos extremos o sus límites, para ello se incluyen los signos $\leq$ ó $\leq$ o simplemente usamos corchetes.

Ejemplo:



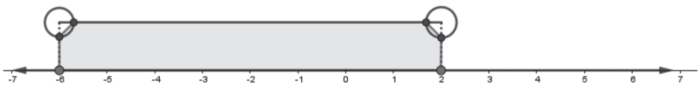
$-2 \leq x \leq 4$

$[-2, 4]$

Intervalo Abierto

Es aquel que no incluye los extremos, considerándose como tales a los números infinitamente más cercanos dentro del intervalo.

Ejemplo:



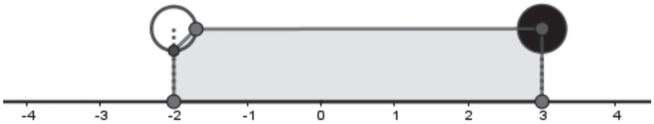
$-6 < x < 2$

$(-6, 2)$

Intervalos Semiabiertos

Se caracterizan por incluir a uno de sus extremos. De acuerdo al extremo que se considere, se determina el intervalo semiabierto hacia la derecha o hacia la izquierda.

Ejemplo:



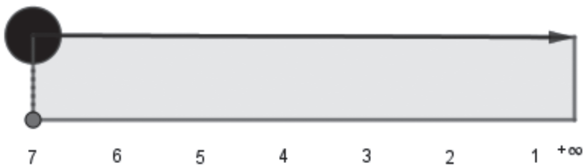
$$-2 < x \leq 3$$

$$(-2, 3]$$

Intervalos al Infinito

Se caracterizan por tener uno de sus extremos abiertos o cerrados, ya sea hacia la derecha o hacia la izquierda.

Ejemplo:

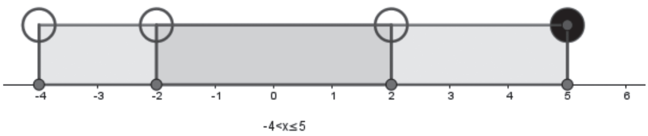


Operaciones con intervalos

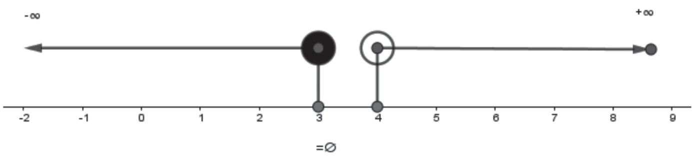
Se presenta las operaciones de unión e intersección, para lo cual debemos graficar a los intervalos propuestos y de allí determinamos el resultado operacional.

Ejemplos:

$$(-2, 5] \cup (-4, 2) = (-4, 5]$$



$$(-\infty, 3] \cap (4, \infty) = \emptyset$$



Ejercicios de Aplicación

1. $[-10, 4] \cup [-8, 5) \cup (-6, 10]$ soluc. $[-10, 10]$
2. $(-\infty, -2) \cup [-5, 8)$ soluc. $(-\infty, 8)$
3. $(-5, 4] \cup (-7, 3)$ soluc. $(-5, 4]$

4. $(-\infty, -3] \cup (-6, 4]$ soluc. $(-\infty, 4]$

5. $(-3, 2] \cup (-5, 4] \cup [1,7)$ soluc. $(-5, 7)$

6. $(-5, 2] \cap (-5, 4]$ soluc. $(-5, 2]$

7. $(-2, 5] \cap (-3, 5]$ soluc. $(-2, 5]$

8. $(-8, 3) \cap [-7, 4)$ soluc. $[-7, 3)$

9. $(-4, 3] \cap (-7, 5] \cap (4, \infty)$ soluc. $\emptyset$

10. $[-5, 6) \cap (-4, 3) \cap [-3, 5)$ soluc. $[-3, 3)$

Potenciación

La potenciación es una operación matemática de composición, en la que al tener la base y el exponente, se debe encontrar un nuevo término llamado potencia.

$$a^n = b$$

Propiedades

La potenciación cumple con las siguientes propiedades:

1. En el producto de potencias de la misma base, se conserva la base y se suman los exponentes.

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

Ejemplos:

$$27^{10}.\ 27^{12}.\ 27^{-18} = 27^{4}$$

$$5^{x+3}\ .\ 5^{-x+2} = 5^{x+3-x+2} = 5^{5}$$

$$7^{2/3}.\ 7^{1/2}.\ 7 = 7^{2/3+½+1} = 7^{13/6}$$

2. En el cociente de bases iguales, se conserva la base y se restan los exponentes.

$$a^{m} / a^{n} = a^{m-n}$$

Ejemplos:

$$142^{10} / 142^{7} = 142^{3}$$

$$9^{2x-6} / 9^{2x-10} = 9^{2x-6-2x+10} = 9^{4}$$

$$10^{2e+5} / 10^{e+2} = 10^{2e+5-e-2} = 10^{e+3}$$

3. Toda potencia de exponente cero es igual a la unidad.

$$a^{0} = 1$$

Ejemplos:

$$(\sqrt[3]{2x-5})^0 = 1$$

$$(\log 328 / 277)^0 = 1$$

$$(\sqrt[2]{329} - 496)^0 = 1$$

4. Toda potencia de exponente negativo se transforma en positiva colocando el recíproco de la base.

$$a^{-m} = 1 / a^m$$

Ejemplos:

$$11^{-23} = 1 / 11^{23}$$

$$(- 7 / 8)^{-2} = (- 8 / 7)^2 = 64/49$$

$$\left(\frac{2x-3}{x-5} \right)^{-2} = \left(\frac{x-5}{2x-3} \right)^2$$

5. Toda potencia de base negativa elevada a un exponente par nos dará como resultado una potencia de signo positiva.

$$(-a)^m = + a^m;\ m \text{ número par}$$

Ejemplos:

$$(- 2/7)^2 = + 4 / 49$$

$$(-5)^4 = +625$$

$$(-1/3)^4 = +1/81$$

6. Toda potencia de base negativa elevada a un exponente impar nos dará como resultado una potencia de signo negativa.

   $(-a)^n = -a^n$; siendo n número impar
   Ejemplos:

   $$(-1)^{11} = -1$$

   $$(-3)^3 = -27$$

   $$(-1/2)^5 = -1/32$$

7. La potencia de potencia es igual a la base elevada al producto de sus exponentes.

   $$(a^m)^n = a^{m.n}$$

   Ejemplos:

   $$((3)^2)^3 = 3^6$$

   $$((u^2))^5 = u^{10}$$

   $$((2/3)^4)^3 (2/3)^{12}$$

Ejercicios de aplicación:

1. $(2/3 - 1)^2 - (-2/3)^{-1} + (1 - 1/2)^3$ soluc. $\frac{125}{72}$

2. $(1/5 - 2)^2 + (327)^0 - (5 - 7/4)^{-1} - 3/8$ soluc. $\frac{2139}{104}$

3. $9/5 - (2 - 3/2)^2 + ((2)^2)^2 - 10/3$ soluc. $\frac{853}{60}$

4. $(725)^0 + (4 - 3/4)^2 - (3/2 - 1)^{-1} + 7/3$ soluc. $\frac{571}{48}$

5. $(8/3 - 2)^{-1} + (4 - 1/2)^2 - (-2)^5$ soluc. $\frac{183}{4}$

6. $(3 - 1/4)^2 - (3/2 + 1)^4 + (-1)^{17}$ soluc. $\frac{65}{2}$

7. $(5 - 2/5)^{-1} + (1/4 - 2)^2 - (3/4 - 2)^{-2}$ soluc. $\frac{24287}{9200}$

8. $(4/3 - 2)^2 - (-2 - 3/7)^{-1} + (-5/7)^{-1}$ soluc. $-\frac{416}{765}$

9. $(5/3 - 5)^{-1} + ((-3)^2)^2 - (-2/3)^3 - (-968525)^0$ soluc. $\frac{21599}{270}$

10. $(2/3 + 3)^{-1} - (-2/3 - 5/4)^{-1} + (5/2 - 2/3)^2$ soluc. $\frac{3297}{594}$

Radicación

Es una operación inversa a la potenciación, en la cual al tener el índice de la raíz y el término subradical, debemos encontrar la raíz.

$$\sqrt[n]{a} = b$$

Ejemplos:

$$\sqrt{\sqrt{16}} = 2$$

$$\sqrt{7} \,.\, \sqrt{5} \,.\, \sqrt{11} = \sqrt{7.5.11} = \sqrt{385}$$

$$\sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$$

Ejercicios de aplicación:

1. $(-2/3) : \sqrt{8 : \frac{1}{2}^{-1}} + \frac{3}{4} : (-2) - \left[\left(\frac{1}{2} - 1 \right)^{-1} \right]^{-3}$ sol: $\frac{7}{12}$

2. $\sqrt{\sqrt{\left[(-5)*2-\frac{1}{8}\right]*\left(-\frac{1}{2}\right)}} - \sqrt{\sqrt{(-4)^2(-2)^3\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}}}$ sol: $-\frac{5}{2}$

3. $$\frac{\sqrt{2} * \sqrt{\frac{\frac{3}{8}}{27}} + \left(-\frac{3}{8}\right) * \left(\frac{16}{9}\right) * 3 + 1}{\frac{\left[\frac{3}{-\frac{1}{2}+1}\right]}{2-\frac{2}{7}}}$$ sol: $-\frac{6}{5}$

4. $$\left(\frac{1-\frac{\frac{1}{2}}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+1}\right)^{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}-2\right)^{3}}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^{2}} + \frac{\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}{3}}{\frac{2}{\frac{1}{6}-\frac{5}{3}}}$$ sol: $\frac{239}{16}$

5. $$\frac{\sqrt[6]{\frac{1}{2} * \frac{1}{4} * \frac{1}{8}}}{1-\frac{1}{2}}$$ sol: 1

6. $$-2 + \frac{2}{\frac{4}{3}} + \sqrt{\frac{2-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}}$$ sol: $\frac{7}{2}$

7. $$\frac{1}{3} - \sqrt{\sqrt{81}} * \frac{3}{\frac{1}{2}} + \frac{5}{3}$$ sol: -16

8. $\dfrac{\sqrt{81} * \left(-\dfrac{2}{5}\right) * (-25)}{\dfrac{\sqrt[3]{8}}{3} - \dfrac{7}{2}}$ sol: $-\dfrac{540}{17}$

9. $\dfrac{\sqrt[4]{16} - \dfrac{1}{5}}{\dfrac{3}{8} + \dfrac{7}{4}}$ sol: $\dfrac{72}{85}$

10. $\left(\left(\sqrt{16}\right)\right)^2 - \sqrt[3]{-125} + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^3 + \dfrac{\sqrt[4]{81}}{5}$ sol: $\dfrac{2876}{135}$

Racionalización

La racionalización es un procedimiento que tiene por objeto eliminar los radicales de los denominadores, generalmente. Para realizar este proceso se debe hacer coincidir el índice de la raíz con el exponente de la base cuando se trata de monomios.

Si la expresión a racionalizar en un binomio entonces se aplica el criterio de la conjugada que significa multiplicar por el mismo binomio pero cambiando el signo de la mitad.

Ejemplo R1: $\dfrac{2}{\sqrt{3}} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\dfrac{\sqrt{3}}{\boxed{\sqrt{3}}}\right) =$

Factor racionalizante monómico

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo R2: $\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}} = \left(\dfrac{3}{\sqrt[3]{2}}\right)\left(\dfrac{\sqrt[3]{2^2}}{\boxed{\sqrt[3]{2^2}}}\right) =$

Factor racionalizante monómico

$$\frac{3\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^3}} = \frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$$

Ejemplo R3:

$$\frac{4}{2\sqrt{2}-3}=\left(\frac{4}{2\sqrt{2}-3}\right)\left(\frac{2\sqrt{2}+3}{\boxed{2\sqrt{2}+3}}\right)=$$

$$=\frac{4\left(2\sqrt{2}+3\right)}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(3\right)^2}=\frac{4\left(2\sqrt{2}+3\right)}{8-9}=$$

$$=\frac{4\left(2\sqrt{2}+3\right)}{-1}=-8\sqrt{2}-12$$

Factor
racionalizante
binómico

Ejemplo R4:

$$=\frac{5}{\sqrt{35}}=\left(\frac{5}{\sqrt{35}}\right)\left(\frac{\sqrt{35}}{\boxed{\sqrt{35}}}\right)=$$

$$=\frac{5\sqrt{35}}{35}=\frac{\sqrt{35}}{7}$$

Factor
racionalizante
monómico

Ejercicios de aplicación

Racionalizar las siguientes expresiones:

1. $\dfrac{7}{\sqrt[4]{7}}$ sol: $\sqrt[4]{343}$
2. $\dfrac{2}{3*\sqrt{2}+4}$ sol: $3\sqrt{2}-4$

3. $\dfrac{5}{4-3\sqrt{3}}$ sol: $\dfrac{5(4+3\sqrt{3})}{-11}$

4. $\dfrac{5}{2\sqrt{7}+3}$ sol: $\dfrac{5(2\sqrt{7}-3)}{19}$

5. $\dfrac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{7}+3}$ sol: $\dfrac{12\sqrt{35}-9\sqrt{5}}{103}$

6. $\dfrac{\sqrt{7}}{5\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$ sol: $\dfrac{5\sqrt{14}+2\sqrt{21}}{38}$

7. $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ sol: $\dfrac{3+3\sqrt{5}-6\sqrt{2}-3\sqrt{10}}{-9}$

8. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-2}$ sol: $\dfrac{-4\sqrt{3}+\sqrt{15}+6\sqrt{5}}{22}$

9. $\dfrac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{7}+\sqrt{3}-4}$ sol: $\dfrac{210\sqrt{21}+300\sqrt{3}+60\sqrt{21}+240\sqrt{7}+1065}{-111}$

10. $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ sol: $\dfrac{2\sqrt{15}-3\sqrt{10}-5\sqrt{6}}{-6}$

Capítulo II

Expresiones Algebraicas

- Polinomios
- Combinación de operaciones con expresiones algebraicas
- Factorización
- Dominio de una expresión algebraica
- Simplificación de expresiones algebraicas
- Adición y sustracción de expresiones racionales
- Multiplicación y división de expresiones racionales
- Fracciones complejas

Polinomios

Un polinomio con una variable x es una expresión de la forma:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots\ldots + a_1 x + a_0$$

En donde a_0, a_1, …………, a_n son números reales, y n es un entero no negativo. Si $a \neq 0$, entonces el polinomio tiene grado n. Los monomios $a_k x^k$, que conforman el polinomio reciben el nombre de términos del polinomio.

Ejemplos:

$3/8\ x^4 y^2 z$	monomio
$a^5 + 23\ b^3$	binomio
$2m^5 + 3\ n^3 – p$	trinomio
$a^4 – 2b^3 – c^2 +d$	cuatrinomio
$4x^6 – y^4 – 7\ z^3 + 9\ u^2 – 11w$	polinomio

Combinación de operaciones con expresiones algebraicas. En esta combinación de operaciones se presentan las siguientes:

Adición y sustracción de expresiones algebraicas. - Para realizar esta forma operacional deberemos ordenar los respectivos polinomios que constituyen los sumandos, para luego de reducir los términos semejantes llegar a obtener una suma total en forma ordenada.

Ejemplos:

Dados los polinomios

P_1: $3x^2 + 7x^4 – 2x + 4\ x^3 - 8$

P_2: $4x^3 – 5x^2 + 11x - 10x^4 + 23$ Sumar: $P_1 + P_2$

$$
\begin{array}{r}
7x^4 + 4x^3 + 3x^2 – 2x - 8 \\
-10x^4 + 4x^3 – 5x^2 + 11x+23 \\
\hline
-3x^4 + 8x^3 -2x^2 + 9x + 15
\end{array}
$$

Dados los polinomios Sumar: $P_1 + P_2$

P_1: $3/2\ u^5 + 1/3\ u^3 – 3/8\ u^2 + 2/5\ u^4 – 2/5$

P_2: $1/4\ u^3 +1/4\ u^5 + 3/4\ u^2 – 3/10\ u^4 + 3/8$

$$
\begin{array}{rl}
 & 3/2\ u^5 + 2/5\ u^4 + 1/3\ u^3\ \ -3/8\ u^2\ \ – 2/5 \\
+ & 1/4\ u^5 – \ 3/10\ u^4 +1/4\ u^3 + 3/4\ u^2 + 3/\ 8 \\
\hline
 & 7/4\ u^5 + 1/10\ u^4 + 7/12\ u^3 +3/8\ u^2 – 1/40
\end{array}
$$

Multiplicación de expresiones algebraicas

Dados los polinomios

P_1: $2x^2 - 3x + 5x^3 + 2x^4 - 5$

P_2: $3x + 2x^2 - 7$ Multiplicar: $P_1 . P_2$

$$
\begin{array}{r}
2x^4 + 5x^3 + 2x^2 - 3x - 5 \\
2x^2 + 3x - 7 \\
\hline
4x^6 + 10x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 10x^2 \\
6x^5 + 15x^4 + 6x^3 - 9x^2 - 15x \\
-14x^4 - 35x^3 - 14x^2 + 21x + 35 \\
\hline
4x^4 + 16x^5 + 5x^4 - 35x - 33x^2 + 6x + 35
\end{array}
$$

División de expresiones algebraicas

Dados los polinomios

$P_{1:}$ $9x + x^2 + 20$ P_2: $5 + x$ Dividir: $P_{1:}$ P_2

$$
\begin{array}{r|l}
\cancel{x^2} + 9x + 20 & x + 5 \\
\cline{2-2}
-\cancel{x^2} - 5x & x + 4 \\
\cline{1-1}
0 + \cancel{4x} + \cancel{20} & \\
-\cancel{4x} - \cancel{20} & \\
\cline{1-1}
0 \quad 0 &
\end{array}
$$

Ejemplo 1:

Sea a(x)= x^2+2x+1 y b(x)= x+4, podemos escribir $\dfrac{a(x)}{b(x)}$ como $q(x)+\dfrac{r(x)}{b(x)}$

Donde q y r son polinomios, y el grado de r es menor que el grado de b.

(a) ¿Cuál es el cociente de q(x)?

(b) ¿Cuál es el residuo de r(x)?

Solución:

Observa que a(x) tiene mayor grado que b(x). Esto nos permite encontrar un polinomio cociente q(x), que no sea cero.

Usando división larga con polinomios para encontrar el cociente q(x), y el residuo r(x), de $\dfrac{a(x)}{b(x)}=\dfrac{x^2+2x+1}{x+4}$:

Primero dividimos x^2 entre x y obtenemos x:

Multiplicamos (x+4) por x para obtener x^2+4x, y después restamos para cancelar el término con x^2:

$$(x^2+2x)-(x^2+4x)$$

$$=x^2+2x-x^2-4x$$

$$= -2x$$

Después, dividimos -2x entre x para obtener -2

Repetimos el proceso de arriba: multiplicar (x+4) por -2 para obtener -2x-8, y después restamos para eliminar el término con x:

$$(-2x+1)-(-2x-8)$$

$$=(-2x+1)-(-2x)-(-8)$$

$$=-2x+1+2x+8$$

$$=9$$

El proceso termina aquí, pues (x+4) es un polinomio de primer grado y 9 es un polinomio de grado cero.

Se consigue que r(x) = 9, q(x) = x-2, y

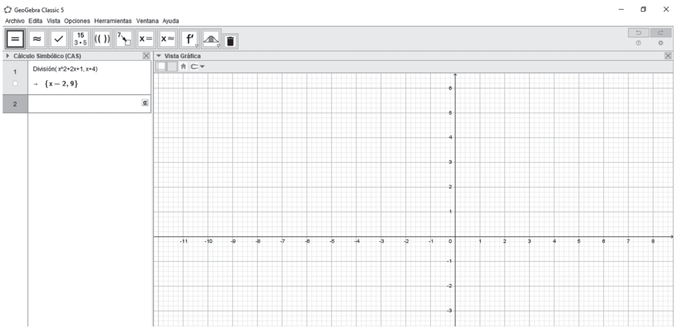
$$\frac{x^2+2x+1}{x+4}=x-2+\frac{9}{x+4}$$

En conclusión:

q(x) = x-2

r(x) = 9

Desafío: Resuelva el ejercicio anterior mediante el uso de CAS de Geogebra



Mediante la aplicación informática se comprueba el resultado obtenido.

Ver anexo 5

Ejercicios de aplicación

Resolver las operaciones indicadas con cada uno de los polinomios propuestos.

1. Dados los polinomios
   P_1: $7u^3 + 5u^6 - 2u^2 + 5u^4 - 3u^5 - 4u + 32$
   P_2: $5u^4 - 3u^5 + 9u^3 + 17u^2 - 23u - 28$
   Calcular: $P_1 + P_2$ $P_1 - P_2$ $2P_1 + 3P_2$ $4P_1 - 2P_2$
   Soluc. $5u^6 - 6u^5 + 10u^4 + 16u^3 + 15u^2 - 27u + 4$

   Soluc. $5u^6 - 2u^3 - 19u^2 + 19u + 60$

   Soluc. $10u^6 - 15u^5 + 25u^4 + 41u^3 + 47u^2 + 61u - 20$

   Soluc. $20u^6 - 18u^5 + 30u^4 + 46u^3 + 26u^2 - 62u + 72$

2. Dados los polinomios
   P_1: $37a + 10 + 12a^4 - 41a^3 + 4a^2$
   P_2: $-5a + 4a^2 - 2$
   Calcular: $P_1 : P_2$ Soluc. $3a^2 - 14a + 20 - \dfrac{91a - 50}{4a^2 + 5a - 2}$

3. Dados los polinomios

   P_1: $-3x^2y^2 + 6x^4 - 11xy^2 - 4y^4$

4. Dados los polinomios soluc. $x^2 – 2x + 2$

P_1: $-5x^3 -12x + 6 +11x^2 + x^4$
$P_{2:}$ $-3x + 3 + x^2$
Calcular: P_1: P_2

5. Dados los polinomios soluc.$x^2 - 5x +6 - \frac{3x-6}{x^2+2x-1}$

$P_{1:}$ $- 5x^2 +14x - 6 + x^4 -3x^3$
P_2: $2x – 1 + x^2$
Calcular: $P_{1:}$ P_2

Factorización

La factorización consiste en descomponer a un polinomio determinado en dos o más factores, para lo cual aplicaremos las siguientes reglas:

1. **Factor común monomio o polinomio**

.

Ejemplos:

Descomponer en factores

$4x^6 - 8x^4 + 10x^2 = 2x^2 (2x^4 - 4x^2 + 5)$

$7a(3x - 5) + 14b(3x - 5) - 21c(3x - 5) = 7(3x - 5)(a + 2b - 3c)$

$1/2\,x(2a - b) - 3/4\,y(2a - b) + 5/8\,z(2a - b) = 1/2(2a - b)(x - 3/2\,y + 5/4\,z)$

Ejercicios propuestos

Descomponer en factores los siguientes polinomios:

1. $15a^4b^3 - 25a^2b^4 + 30a^3b^2 - 40a^2b^3$
   Soluc. $5a^2b^2(3a^2b - 5b^2 + 6a - 8b)$

2. $20w(3a - 5b + c) - 15x(3a - 5b + c) + 25z(3a - 5b + c)$
   Soluc. $5(4w - 3x + 5z)(3a - 5b + c)$

3. $2/3\,a(x - 2y + 3z) - 7/3\,b(x - 2y + 3z) + 5/3\,c(x - 2y + 3z)$
   Soluc. $1/3(2a - 7b + 5c)(x - 2y + 3z)$

4. $7x^8y^4 - 21x^4y^2 + 28x^5y^3 - 49x^4y^2z^2$
   Soluc. $7x^4y^2(x^4y^2 - 3 + 4xy - 7z^2)$

5. $3/8\,a^2b^3 - 5/8\,a^3b^2c^3 + 7/8\,a^3b^3c^2 - 9/8\,a^2b^4c3$
   Soluc. $1/8\,a^2b^2(3b - 5ac^3 + 7abc^2 - 9b^2c^3)$

6. $9m(a-b)+18n(a-b)-27p(a-b)+36q(a-b)$
Soluc. $9(m+2n-3p+4q)(a-b)$

7. $14x^4y^2+21x^5y^4-28x^3y^5+35x^2y^2-49x^4y^3$
Soluc. $7x^2y^2(2x^2+3x^3y^2-4xy^3+5-7x^2y)$

8. $1/5\,p^4q^6-2/15\,p^3q^2+4/25\,p^5q^3-3/35\,p^6q^4+2/45\,p^3q^4$
Soluc. $1/5\,p^3q^2(pq^4-2/3+4/5\,p^2q-3/7\,p^3q^2+2/9\,q^2)$

9. $11a(x+y+z)-22b(x+y+z)+44c(x+y+z)-33d(x+y+z)$
Soluc. $11(a-2b+4c-3d)(x+y+z)$

10. $7/8\,x(2a-b)-5/16\,y(2a-b)+3/40\,z(2a-b)-11/24\,w(2a-b)$
Soluc. $1/8(2a-b)(7x-5/2\,y+3/5\,z-11/3w)$

2. Factor común por agrupación de términos

La expresión algebraica a ser factorizada debe estar constituida por cuatro, seis, ocho, etc., número de términos, de tal forma que se puedan agrupar de dos en dos, de tres en tres, debiendo existir entre ellos algún en común.

Ejemplos:

Descomponer en factores

a) $3x^3-x^2+6x-2$

$(3x^3-x^2)+(6x-2)$

$x^2(3x-1)+2(3x-1)$

$(3x-1)(x^2+2)$

b) $ax+bx+ay+by+az+bz$

$(ax+ay+az)+(bx+by+bz)$

$a\ (x + y + z) + b\ (x + y + + z)$

$(x + y + z)\ (a + b)$

Ejercicios propuestos

Descomponer en factores los siguientes polinomios:

1. $-9x^3 - 3x^2 + 3x + 1$ Soluc. $(3x + 1)(1 - 3x^2)$
2. $x^3 + x^2 + x + 1$ Soluc. $(x + 1)(x^2 + 1)$
3. $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ Soluc. $(2x + 1)(x^2 - 1)$
4. $3am + 2bm - m^2 - 6an - 4bn + 2mn$
   Soluc. $(3a + 2b - m)(m - 2n)$
5. $ax + ay + a - x - y - 1$ Soluc. $(x + y + 1)(a - 1)$
6. $az^4 + bz^3 - 2az - 2b$ Soluc. $(az + b)(z^3 - 2)$
7. $2x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 9x$ Soluc. $x(x^2 - 3)(2x + 3)$
8. $am + 6bn + 3bm + 2an$ Soluc. $(a + 3b)(m + 2n)$
9. $2xy - yz + 6x^2 - 3xz$ Soluc. $(2x - z)(3x + y)$
10. $3a^2 - 7b^2 - 9a^3 + 21ab^2$ Soluc. $(1 - 3a)(3a^2 - 7b^2)$

3. Trinomio cuadrado perfecto

La expresión a ser factorada deberá estar formada por tres términos, siendo sus extremos cuadrados perfectos positivos.
Extraemos las raíces cuadradas de los extremos y formamos un binomio con las mismas, con el signo del segundo elemento del trinomio y elevando todo al cuadrado.

Ejemplos:
Descomponer en factores

a) $4(a + b)^2 - 20(a + b)(a - b) + 25(a - b)^2$

$[2(a + b) - 5(a - b)]^2$

$[2a + 2b - 5a + 5b]^2$

$[-3a + 7b]^2$

b) $49(2x-3y)^2 + 84(2x-3y)(3x+2y) + 36(3x+2y)^2$
$[7(2x-3y) + 6(3x+2y)]^2$
$[14x - 21y + 18x + 12y]^2$
$[32x - 9y]^2$

Ejercicios propuestos

Descomponer en factores los siguientes polinomios:

1. $64 - 48z + 9z^2$ Soluc. $(8-3z)^2$
2. $(a+b)^2 - 2(a+b)c + c^2$ Soluc. $(a+b+c)^2$
3. $16 - 8(x-z) + (x-z)^2$ Soluc. $(4-x+z)^2$
4. $0.01 - 0.2x^2 + x^4$ Soluc. $(0.1 - x^2)^2$
5. $(x+y)^2 + 6(x+y) + 9$ Soluc. $(x+y+3)^2$
6. $16(a-3b)^2 - 56(a-3b)(2a+3b) + 49(2a+3b)^2$ Soluc. $(-10a - 33b)^2$
7. $100(3a+b)^2 - 20(3a+b)(2a-5b) + (2a-5b)^2$ Soluc. $(28a + 15b)^2$
8. $225(3x-y)^2 + 210(3x-y)(2x+3y) + 49(2x+3y)^2$ Soluc. $(59x + 6y)^2$
9. $169(2m+5n)^2 - 390(2m+5n)(3m-2n) + 225(3m-2n)^2$ Soluc. $(-19m + 95n)^2$
10. $400(5a-7b) - 680(5a-7b)(4a+3b) + 289(4a+3b)^2$ Soluc. $(32a - 191b)^2$

4. Diferencia de cuadrados perfectos

La expresión a ser factorizada debe estar constituida por dos términos cuadrados perfectos separados por el signo negativo.
Extraemos las raíces cuadradas de ambos términos y formamos con las mismas dos factores con signo positivo y negativo, respectivamente.

Ejemplos:

Descomponer en factores los siguientes polinomios:

a) $25 /4\ a^6 – 49 / 81\ b^4$
$(5/2\ a^3 + 7 /9\ b^{2)}\ (5 / 2\ a^3 - 7/9\ b^2)$

b) $256\ x^{4m} - 225\ y^{2n}$
$(16\ x^{2m} + 15\ y^{n})\ (16\ x^{2m} - 15\ y^{n})$

Ejercicios propuestos

Descomponer en factores los siguientes polinomios:

1. $4/25\ a^{16m} – 81 / 100\ b^{50n}$
   Soluc. $(2/5\ a^{8m} + 9/10\ b^{25n})(2/5\ a^{8m} – 9/10\ b^{25n})$
2. $81\ (2x – 3y)^2 – 225\ z^{16}$
   Soluc. $(18x -27y +15\ z^8)\ (18x -27y -15\ z^2)$

3. $144\ (3\ a – b)^2 – (2\ a + b)^2$

Soluc. (38 a -11b) (34 a -13 b)

4. $49(2x - 5y)^2 - 36(4x + 3y)^2$
Soluc. (38x -17y) (-10x -53y)

5. $1/9(2a + 3b)^2 - 4/25(a - 2b)^2$
Soluc. (16/15 a + 1 /5 b) (4/15 a +9 / 5b)

6. $25/121(5x + 4y)^2 - 36/49(2x + 3y)^2$
Soluc. (307/77x+338/77 y) (43/77 x - 58 /77 y)

7. $196(2x + 3y)^2 - 289(4x + y)^2$
Soluc. (96x +59 y) (-40x +25y)

8. $1/81(4a - 3b)^2 - 9/4(2a + 3b)^2$
Soluc. (31/9 a + 25 /6 b) (-7/3 a -29/6 b)

9. $324(6a + 5b)^2 - 361(2a - 3b)^2$
Soluc. (146 a +33b) (70 a +147b)

10. $4/25(3m - 2n)^2 - 9/121(2m + n)^2$
Soluc. (96/55 m – 29 /55 n) (36 /55 m -59/55 n)

5. Trinomio cuadrado incompleto

La expresión a ser factorizada debe estar constituida por dos o tres términos, siendo sus extremos cuadrados perfectos.
Se extrae las raíces y buscamos las expresiones algebraicas que sumadas y restadas al polinomio complete el trinomio cuadrado perfecto, para luego aplicar las reglas del trinomio cuadrado perfecto y la diferencia de cuadrados perfectos, quedando de esta forma factorizado el polinomio dado.

Ejemplos:
Descomponer en factores la suma de los siguientes polinomios:

a) $1 + x^2 + x^4$

$ + x^2 \qquad - x^2$

$(1 + 2x^2 + x^4) - x^2$

$(1 + x^2)^2 - x^2$

$(1 + x^2 + x)(1 + x^2 - x)$

b) $25x^4 + \quad x^2y^2 + y^4$

$+ 9x^2y^2 \qquad - 9x^2y^2$

$25x^4 + 10x^2y^2 + y^4 - 9x^2y^2$

$$(5x^2 + y^2)^2 - 9x^2y^2$$

$$(5x^{2+} y^2 + 3xy)(5x^2 + y^2 - 3xy)$$

$$(5x^2 + 3xy + y^2)(5x^2 - 3xy + y^2)$$

c) $a^4 + 4b^4$

$$\frac{a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2}{}$$

$$a^4 \quad + 4a^2b^2 + 4b^4 \quad - 4a^2b^2$$

$$(a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2$$

$$(a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$$

$$(a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$$

Ejercicios propuestos:

Descomponer en factores los siguientes polinomios:

1. $a^4 + a^2b^2 + b^4$

   Soluc. $(a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2)$
2. $m^4 - 17m^2 + 16$

   Soluc. $(m^2 + 3m - 4)(m^2 - 3m - 4)$
3. $a^4 - 7a^2b^2 + b^4$

   Soluc. $(a^2 + 3ab + b^2)(a^2 - 3ab + b^2)$
4. $4 + a^4$

   Soluc. $(a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$
5. $x^4 - 19x^2y^2 + 9y^4$

   Soluc. $(x^2 + 5xy + 3y^2)(x^2 - 5xy + 3y^2)$

6. $x^4 + 64$

   Soluc. $(x^2 + 4x + 8)(x^2 - 4x + 8)$
7. $64x^4 + y^8$

   Soluc. $(8x^2 + 4xy^2 + y^4)(8x^2 - 4xy^2 + y^4)$
8. $b^4 + 1024$

   Soluc. $(b^2 + 8b + 32)(b^2 - 8b + 32)$
9. $9a^4 - 21a^2b^2 + 4b^4$

   Soluc. $(3a^2 + 3ab - 2b^2)(3a^2 - 3ab - 2b^2)$
10. $x^4 + 2x^2y^2 + 9y^4$

    Soluc. $(x^2 + 2xy + 3y^2)(x^2 - 2xy + 3y^2)$

6. Trinomio de la forma : $x^2 \pm px \pm q$

La expresión algebraica a ser factorada debe estar constituida por tres términos, siendo el primer término un cuadrado perfecto con coeficiente igual a la unidad.
Extraemos la raíz del primer término y formamos dos factores con el signo del segundo elemento del trinomio en el primer factor, y el producto de los signos del segundo por el tercer elemento en el segundo factor. Luego, buscamos dos números que multiplicados entre sí genere el tercer elemento del trinomio, y sumados algebraicamente formen el segundo elemento del trinomio.

Ejemplos:

Descomponer en factores los siguientes polinomios:

a) $x^2 - 7x + 10$

$(x - 5)(x - 2)$

b) $(3x + 2)^2 + 8(3x + 2) + 12$
$[(3x + 2) + 6][(3x + 2) + 2]$

$(3x + 2 + 6)(3x + 2 + 2)$
$(3x + 8)(3x + 4)$

Ejercicios propuestos:

Descomponer en factores los siguientes polinomios:

1. $x^2 + 2x - 3$ — Soluc. $(x + 3)(x - 1)$
2. $X^{2n} - 19x^n - 120$ — Soluc. $(x^{2n} - 24)(x^{2n} - 5)$
3. $x^4 - 28x^2 + 115$ — Soluc. $(x^2 - 23)(x^2 - 5)$
4. $a^{2n} + 40a^n + 144$ — Soluc. $(a^{2n} + 36)(a^{2n} + 4)$
5. $y^2 + 10yz - 75z^2$ — Soluc. $(y + 15z)(y - 5z)$
6. $m^2 + 13m - 90$ — Soluc. $(m + 18)(m - 5)$
7. $a^2 - 2ab - 48b^2$ — Soluc. $(a - 8b)(a + 6b)$
8. $a^2b^2 - 48abc - 100c^2$ — Soluc. $(ab - 50c)(ab + 2c)$
9. $a^2 + 0.29a + 0.1$ — Soluc. $(a + 0.25)(a + 0.4)$
10. $y^2 - 5/6\,y + 1/6$ — Soluc. $(y - 1/3)(y - 1/2)$

7. Trinomio de la forma : $ax^2 \pm bx \pm c$

La expresión a ser factorada deberá estar constituida por tres términos, siendo el primer término una expresión cuadrada perfecta, cuyo coeficiente que acompaña a la misma debe ser diferente a la unidad.

Para factorar a un polinomio de estas características podemos aplicar dos métodos: el método directo y el de aspa simple.

Ejemplos:

Descomponer en factores los siguientes polinomios:

a) $3x^2 - 16x + 5$

$3 * 5 = 15$

$(-15) + (-1) = -16$

Método directo.- Se basa en hallar dos números que multiplicados coincidan con el producto de las constantes laterales y sumados el coeficiente intermedio.

$$(3x-15)(3x-1) = \frac{\cancel{3}(3x-15)(3x-1)}{\cancel{3}} =$$

$$(x-5)(3x-1)$$

Método del aspa simple

$$\begin{array}{lll} 3x & -1 = & -\ x \\ x & -5 = & \underline{-15\ x} \\ & & -16\ x \end{array}$$

$$= (x - 5) (3x - 1)$$

b) $8 x^2 – 14x -15$

Método directo

$8 * 15 = 120$

$(-20) + (6) = -14$

$$(8x-20)(8x+6)=\frac{\cancel{4}(2x-5)\cancel{2}(4x+3)}{\cancel{8}}=$$

$$(2x-5)(4x+3)$$

Método del aspa simple

$$\begin{array}{lcrcr} 4x & & 3 & = & 6x \\ 2x & & -5 & = & -20x \\ \hline & & & & -14x \end{array}$$

$$= (2x – 5) (4x + 3)$$

Ejercicios propuestos:

Descomponer en factores los siguientes polinomios:

1. $2\,(a + b)^2 + 5(a + b) – 3$

   Soluc. $(a+b+3)(2a + 2b -1)$
2. $5x^2 – 7x -6$

   Soluc.$(x- 2)(5x + 3)$
3. $9\,a^2 + 6\,ab - 8\,b^2$

   Soluc. $(3\,a+ 4b)(3\,a – 2b)$
4. $15\,a^2 +8x^2 – 26ax$

   Soluc. $(3\,a – 4x\ )(5\,a – 2x)$
5. $10x^2 – 23xy -5y^2$

   Soluc. $(2x - 5y) (5x + y)$
6. $6x^2 – 7ax – 3\,a^2$

   Soluc. $(2x -3\,a)(3x +a)$
7. $8\,y^2 – 37y -15$

   Soluc. $(y – 5)(8\,y + 3)$
8. $24\,x^2 – 38x +15$

   Soluc. $(6x – 5)(4\,x – 3)$
9. $2\,a^2 -13ab + 6b^2$

   Soluc. $(a -6\,b)(2\,a – b)$
10. $2ab – 24\,a^2 + 15b^2$

    Soluc. $(5b -6\,a)(4\,a +3b)$

8. Trinomio cubo perfecto

La expresión a ser factorada debe estar constituida por dos términos cubos perfectos, separados por el signo positivo o negativo.
Extraemos las raíces cubicas colocando en el primer factor dichas raíces y en el segundo factor formamos un polinomio homogéneo y ordenado de segundo grado, con todos los signos positivos, si se trata de una resta, y alternados, si se trata de una suma.

Ejemplos:

Descomponer en factores los siguientes polinomios:

a) $8\ x^{3m} - 27\ y^{6n} = (2x^{m} - 3\ y^{2n})\ (4\ x^{2m} + 6\ x^{n}\ y^{2n} + 9\ y^{4n})$

b) $125\ (2\ a + b)^3 + (a - 2b)^3 =$
$[5\ (2\ a + b) + (a - 2b)]\ [\ 25\ (2\ a + b)^2 - 5\ (2\ a + b)\ (a - 2b) + (a - 2b)^2] =$

$[10\ a + 5b + a - 2b]\ [\ 25\ (4\ a^2 + 4ab + b^2) - 5\ (2\ a^2 - 4ab + ab - 2b^2) + a^2 - 4ab + 4b^2] =$

$[11\ a + 3b]\ [100\ a^2 + 100\ a\ b + 25b^2 - 10\ a^2 + 20\ ab - 5ab + 10\ b^2 + a^2 - 4ab + 4b^2] =$

$[11\ a + 3b]\ [\ 91\ a^2 + 111\ ab + 39\ b^2]$

Ejercicios propuestos:

Descomponer en factores los siguientes polinomios:

1. $27\ x^{9m} + 8\ y^{3n}$

   Soluc.$(3X^{3m} + 2y^{n})\ (9x^{6m} - 6\ x^{3m}y^{n} + 64\ y^{6n})$

2. $125\ a^{12\ x} – b^{3y}\ z^{15w}$

   Soluc. $(5\ a^{4x} – b^{\ y}\ z^{5w})\ (25\ a^{8x} + 5\ a^{4x}b^{y}\ z^{5w} + b^{2y}z^{10w})$

3. $8(a – b\ )^{3} + (2\ a – b)^{3}$

   Soluc. $(\ 4\ a – 3\ b)\ (4a^{2} – 6ab + 3b^{2}\ )$

4. $(5x – 2y\ )^{3} – 8\ (2x + y\ )^{3}$

   Soluc.$(x-4y)(61\ x^{2} – 2xy + 4\ y^{2}\ )$

5. $216\ (2\ a – 3b\ )^{3} + (a + 2b\ )^{3}$

   Soluc. $(13\ a\ -16b)(\ 133\ a^{2} – 434\ ab + 364\ b^{2})$

6. $1000\ a^{27m} + 343\ b^{12n}$

7. $8/27\ x^{15a} - 125\ /64\ y^{21b}$

   Soluc. $(2/3x^{5a} – 5/4\ y^{7b})(4/9\ x^{10a} + 5/6x^{5a}\ y^{7b} + 25/16y^{14b})$

8. $1/8\ a^{30x} + 1/27\ b^{36y}$

   Soluc. $(1/2\ a^{10x} + 1\ /3\ b^{12y})(1/4\ a^{20x}\ -1/6\ a^{10x}\ b^{12y} + 1/9b^{24y}\ )$

9. $512\ p^{18a} – 729\ q^{33b}$

   Soluc. $(\ 8p^{6a} – 9q^{11b})(64\ p^{12a} + 72\ p^{6a}\ q^{\ 11b} + 81\ q^{22b})$

10. $27\ (3x – 2y\ )^{3} – 125\ (2x + y\ )^{3}$

    Soluc. $(-x\ -11y)\ (271\ x^{2}\ -23\ x\ y + 31\ y^{2}\ )$

Dominio de una expresión algebraica

En general, una expresión algebraica puede o no estar definida para todos los valores de la variable. El dominio de una expresión algebraica es el conjunto de todos los números reales que permite tenga la variable.

Ejemplos:

Hallar el dominio de las siguientes expresiones algebraicas:

a) $\frac{x}{x^2-5x+6} = \frac{x}{(x-2)(x-3)}$

Dominio { x/x ≠ 2 ^ x ≠3 }

b) $2x^2 + 3x - 1$

Dominio{ x/x ∀ R}

Ejercicios propuestos:

Hallar el dominio de las siguientes expresiones algebraicas:

1. $\frac{2x-3}{x^2-7x+10}$ Dominio { x/x ≠ 5 ^ x ≠ 2 }
2. $2x^2 + 3x - 1$ Dominio{ x/x ∀ R }
3. $\frac{\sqrt{x}}{x-5}$ Dominio { x / x ≠ 5 }

4. $\frac{x^2 \ -1}{x^2 \ +x-2}$ Dominio {x/x ≠ -2 ^ x≠ 1 }

5. $\frac{3x-4}{x^2-3x-4}$ Dominio{ x/x ≠4 ^ x ≠ - 1 }

6. $\frac{5x-1}{x^2-4}$ Dominio{ x / x ≠ 2 }

7. $\frac{7x}{x^2 \ +8x+16}$ Dominio { x/x ≠-4 }

8. $3x^2 - 7x + 9$ Dominio{x/x $\forall$ R }

9. $\frac{9x-5}{x^2 +5x+6}$ Dominio{x/x≠ - 3 ^ x ≠ - 2}

10. $\frac{x-17}{5x^2-7x-6}$ Dominio {x/x ≠2 ^ x ≠ -3/5}

Simplificación de expresiones algebraicas

En la simplificación de las expresiones algebraicas debemos considerar el numerador y denominador de las mismas, para realizar la simplificación correspondiente, mediante la aplicación de determinados procesos matemáticos.

Ejemplos:

Simplificar las siguientes expresiones algebraicas:

a) $$\frac{x^{2n+1} - x^{2n}y}{x^{n+3} + x^n y^3} = \frac{x^{2n}(x-y)}{x^n(x^3 - y^3)} = \frac{\cancel{x^{2n}}\cancel{(x-y)}}{\cancel{x^n}\cancel{(x-y)}(x^2 + xy + y^2)} =$$

$$\frac{x^n}{x^2 + xy + y^2}$$

b) $$\frac{x^2 - 4}{xy^2(x+2)} = \frac{(\cancel{x+2})(x-2)}{xy^2\cancel{(x+2)}} = \frac{x-2}{xy^2}$$

Ejercicios propuestos:

Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

1. $\dfrac{x^3 y - y^3 x}{x^2 y - x y^2}$ Soluc. x + y

2. $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 (x-1)}$ Soluc. $\dfrac{x-3}{x^2}$

3. $\dfrac{4x^2 - 16}{x^2 - 16}$ Soluc. $\dfrac{4(x+2)(x-2)}{(x+4)(x-4)}$

4. $\dfrac{y^2 - 5y + 6}{4 - y^2}$ Soluc. $\dfrac{3-y}{y+2}$

5. $\dfrac{(x^2 + 4x)}{x^2 + 6x + 8}$ Soluc. $\dfrac{x}{x+2}$

6. $\frac{5\,a^2-10\,ab}{a-2b}$ Soluc. 5ª

7. $\frac{6\,x^2\;-x-2}{3x-2}$ Soluc.2x + 1

8. $\frac{6\,x^{\,2}-\,3\,xy}{-4\,x^2y\,+2\,x\,y^2}$ Soluc.$-\;\frac{3(\,2x-\;3y\,)}{2x-y}$

9. $\frac{2\,x^2-5x\,+\,2}{2x-1}$ Soluc. x – 2

10. $\frac{9\,-\,x^2}{x^3-\,2\,x^2\,-3x}$ Soluc.$\frac{x+3}{x\,(\,x+1\,)}$

Adición y sustracción de expresiones racionales

En este proceso operacional debemos considerar las fracciones que forman esta estructura operacional, ya que vamos a factorar los denominadores si el caso así lo amerita, para de esta manera facilitar la forma operacional.

Ejemplos:

Resolver las siguientes estructuras operacionales:

a) $\frac{3}{y-2} - \frac{2}{y+2} - \frac{y}{y^2-4} = \frac{3\,(y+2)-2\,(y-2)-y}{y^2-4} = \frac{10}{y^2-4}$

b) $\frac{3t-1}{10} + \frac{5-2t}{15} = \frac{3\,(3t-1)+2\,(5-2\,t)}{30} = \frac{9t-3+10-4\,t}{30} = \frac{5t+7}{30}$

Ejercicios propuestos:

Resolver las siguientes estructuras operacionales:

1. $\frac{3a}{bc} + \frac{2b}{ac}$ soluc. $\frac{3\,a^2+2\,b^2}{abc}$

2. $\frac{3}{x} - \frac{2}{x+1} + \frac{2}{x^2}$ soluc. $\frac{x^2+5\,x+2}{x^2(\,x+1\,)}$

3. $\frac{5}{2s+4} - \frac{3}{s^2+3s+2} + \frac{s}{s^2-s-2}$ soluc. $\frac{7s^2-7s+2}{2(\,s+1\,)(\,s^2-4\,)}$

4. $\frac{x}{6} + \frac{5x}{21}$ soluc. $\frac{17x}{42}$

5. $\frac{3x-6}{4\,x^2+12x-16} - \frac{2x-5}{6\,x^2-6} + \frac{3\,x^2+3}{8\,x^2+40x+32}$ soluc. $\frac{9x^3+x^2-21x+35}{24(x+4)(\,x^2-1\,)}$

6. $\frac{x-1}{5} + \frac{x-2}{10} - \frac{x+1}{2}$ soluc. $\frac{-2x-9}{10}$

7. $\frac{4x-5}{x^2-1} + \frac{3x-1}{x+1} - \frac{5x-2}{x-1}$

soluc. $\frac{-2x^2-3x-2}{x^2-1}$

8. $\frac{9x-7}{x^2-9x+8} + \frac{3x-5}{x-8} + \frac{x+8}{x-1}$

soluc. $\frac{4x^2+x-66}{x^2-9x+8}$

9. $\frac{5x-6}{(x-5)^2} - \frac{8x-9}{x-5} + 10$

soluc. $\frac{2x^2-46x+199}{(x-5)^2}$

10. $\frac{7x-11}{x^3-1} + \frac{4x-3}{x-1} - \frac{2x-5}{x^2+x+1}$

soluc. $\frac{4x^3-x^2+15x-19}{x^3-1}$

Multiplicación y división de expresiones racionales

Para realizar este proceso operacional deberemos observar si las expresiones racionales son polinómicas, y si son factibles de factorarlas lo haremos, para que el procedimiento sea más fácil.

Ejemplos:

Resolver las siguientes estructuras operacionales:

a) $\frac{x^2-25}{x+6} \cdot \frac{x^2-6x-7}{x-5} \cdot \frac{x^2-3}{x+1}$

$$\frac{(x+5)\cancel{(x-5)}}{x+6} \cdot \frac{(x-7)\cancel{(x+1)}}{\cancel{x-5}} \cdot \frac{x^2-3}{\cancel{x+1}}$$

$$\frac{(x+5)}{x+6} \cdot (x-7) \cdot (x^2-3)$$

b) $\frac{2x-3}{7x-5} : \frac{7x+5}{2x-3}$

$$\frac{\cancel{7x+5}}{7x-5} \cdot \frac{2x-3}{\cancel{7x+5}} = \frac{2x-3}{7x-5}$$

Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes estructuras operacionales:

1. $\frac{x+2}{x-5} \cdot \frac{x-5}{x+2}$ soluc. 1

2. $\frac{x^2-49}{x+2} \cdot \frac{x-2}{x+7} \cdot \frac{x+5}{x-7}$ soluc. $\frac{(x-2)(x+5)}{x+2}$

3. $\frac{x^3-27}{x+3} : \frac{x^2+3x+9}{x+3}$ soluc. x -3

4. $\frac{x^2-100}{x+10} : \frac{x-10}{2x-5}$ soluc.2x -5

5. $\frac{4x-2}{10} \cdot \frac{x-3}{2x-1} \cdot \frac{x-1}{x^2-9}$ soluc. $\frac{x-1}{5(x+3)}$

6. $\frac{x^2-6x+9}{2(x-3)} : \frac{x-3}{x^2+2}$ soluc. $\frac{x^2+2}{2}$

7. $\frac{a-b}{a^2+ab} \cdot \frac{a^4-b^4}{a^2-2ab+b^2}$ soluc. $\frac{a^2+b^2}{a}$

8. $\frac{2x^2-3x-2}{2x^2+3x-2} \cdot \frac{2x^2+x-3}{2x^2+7x+3} \cdot \frac{2x^2+5x-3}{2x^2-x-6}$
soluc. $\frac{x-1}{x+2}$

9. $\frac{a^2-4a-5}{a^2+2a-8} : \frac{a^2-3a-10}{a^2+a-12} : \frac{a^2-2a-3}{a^2-4}$ soluc. 1

10. $\frac{x^6+64}{(x^2+4)^3} \cdot \frac{2x^6+16x^4+32x^2}{6x^4+6x^2} : \frac{x^4-4x^2+16}{3a(x^2+1)}$ soluc. a

Fracciones complejas

Son aquellas que se encuentran estructuradas por varios numeradores y denominadores, por lo que para dar solución a este tipo de fracciones deberemos emplear los procesos matemáticos ya indicados anteriormente.

Ejemplos:

Resolver las siguientes fracciones complejas:

a) $$\frac{a+\frac{a\,b}{a-b}}{\frac{a^2}{a^2\ -b^2}-1}=\frac{\frac{a^2}{a-b}}{\frac{b^2}{(\,a+b\,)\,(\,a-b\,)}}=\frac{a^2\ (\,a+b\,)}{b^2}$$

b) $$\frac{\frac{x+2}{x}-\frac{x-2}{2}}{\frac{x+2}{2}-\frac{x-2}{x}}=\frac{\frac{x^2+4}{2x}}{\frac{x^2+4}{2x}}=1$$

Ejercicios propuestos

Resolver las siguientes fracciones complejas:

1) $\dfrac{x-\dfrac{3}{y}}{y-\dfrac{3}{x}}=$ $\qquad sol.\dfrac{x}{y}$

2) $\dfrac{x}{1-\dfrac{1-x}{1+x}}=$ $\qquad sol.\dfrac{1+x}{2}$

3) $\dfrac{\dfrac{x}{c-x}+\dfrac{x}{c+x}}{\dfrac{c}{c-x}-\dfrac{c}{c+x}}=$ $\qquad sol.1$

4) $\dfrac{x^2-x}{1-\dfrac{x}{x+1}}=$ $\qquad sol.-x$

$$5)\ \frac{\dfrac{x-3}{x-5}-\dfrac{x-5}{x-3}}{\dfrac{1}{x-5}-\dfrac{1}{x-3}}= \qquad sol.\,2(x-4)$$

$$6)\ \frac{1}{a-\dfrac{1}{a+\dfrac{1}{a}}}= \qquad sol.\,\frac{a^2+1}{a^3}$$

$$7)\ \frac{x}{1-\dfrac{1-x}{1+\dfrac{x^2}{3-x}}}= \qquad sol.\,\frac{3-x+x^2}{3}$$

$$8)\ \frac{\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{x}{x-1}}{\dfrac{x+1}{x}}= \qquad sol.\,\frac{1}{1-x^2}$$

$$9)\ \frac{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x-1}}}{1+\dfrac{x}{x^{2}-\dfrac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}}}}= \qquad sol.\frac{(x-1)^{2}}{x}$$

$$10)\ \frac{\dfrac{a+b}{a-b}-\dfrac{a-b}{a+b}}{\dfrac{a}{a-b}-\dfrac{a}{a+b}}= \qquad sol.2$$

Como material de apoyo nos podemos valer del editor de ecuaciones y simuladores en línea como symbolab.

Capítulo III

Logaritmos

- Diagnóstico
- Definiciones básicas de logaritmos
- Propiedades de los logaritmos
- Logaritmos especiales
- Ecuaciones exponenciales
- Gráficas con ecuaciones exponenciales
- Gráficas de funciones logarítmicas
- Aplicaciones y trabajo autónomo

Diagnóstico

Pregunta 1

La Tabla I lista valores de salida de la función f(x) $= b^x$ para algunos valores de x, y la Tabla II lista valores de salida de la función g(x) $= \log_b(x)$ para algunos valores de x. En ambas funciones, b es la misma constante positiva.

Llena los valores faltantes en las tablas. Si es necesario, redondea tu respuesta a tres decimales.

No necesitas usar una calculadora.

Tabla I

X	0.827		1.318	1.456
f(x) $= b^x$	5	9	13	17

Tabla II

X	5	7	9	
g(x) $= \log_b(x)$	0.827	1	1.129	1.318

PREGUNTA 2

$$\log_3 \frac{1}{27} = \boxed{}$$

PREGUNTA 3

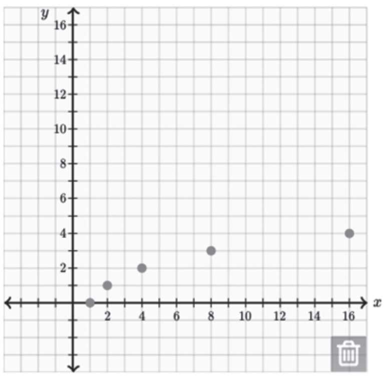
Reescribe la siguiente expresión en la forma log(c).

$$\log(2) + \log(2) = \boxed{}$$

PREGUNTA 4

Los 5 puntos trazados a continuación están en la gráfica de y=$\log_b x$

Basándose únicamente en estos 5 puntos, traza los 5 puntos correspondientes que debes estar en la gráfica de $y = b^x$.



PREGUNTA 5

Reescribe la siguiente expresión en la forma log(c).

$\log(15) - \log(3) = \boxed{\quad\quad\quad}$

Definiciones básicas

Logaritmo

Es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener el número.

Las expresiones $Log_b n = x$ y $b^x = n$ son equivalentes, siendo:

$Log_b n = x$; la notación logarítmica

$b^x = n$; la notación exponencial.

http://proyectodescartes.org/E-DAD/materiales_didacticos/E-DAD_4eso_funciones3-JS-LOMCE/q10_resueltos_3c.htm

Ejemplo 1:

$10^2 = 100$

Logaritmo de 100 en base 10 es 2, se escribe:

$Log_{10} 100 = 2$ ó $Log 100 = 2$

Cuando la base vale 10 va sobreentendida

Propiedades

Son consecuencia de las leyes de los exponentes y se cumple para cualquier base positiva diferente de 1.

1.- $\boxed{Log_b 1 = 0;\ b>0\ y\ }$

El logaritmo de 1 en base b (b>0 y $b \neq 1$) siempre es cero, así como:

$$Log_3 1 = 0$$

$$Log_{3/5} 1 = 0$$

$$Log_8 1 = 0$$

$$Log_1 1 = \text{ no existe}$$

2.- $\boxed{Log_b b = 1;\ b>0\ y\ b \neq 1}$

El logaritmo de la base siempre es 1, así como:

$$Log_5 5 = 1$$

$$Log_\pi \pi = 1$$

$$Log_7 7 = 1$$

$$Log_x x = 1 \text{ donde } x>0 \text{ y } x \neq 1$$

$$Log_{-4} - 4 = \text{no existe}$$

3.- $$\boxed{b^c = a \text{ entonces } Log_b a = c}$$

La base de la potencia es la base del logaritmo, así como:

$5^x = 3$ entonces $Log_5 3 = x$

4.- $$\boxed{Log_b M * N = Log_b M + Log_b N; M > 0; N > 0}$$

El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de sus factores, así tenemos:

Si Log4=0.6020599913 y Log10=1 encuentra Log40.

Log (40)= Log (4*10)

Log (40)= Log (4) + Log (10)

Log (40)= 0.6020599913 + 1

Log (40)= 1.6020599913

5.- $$\boxed{Log_b\left(\frac{M}{N}\right) = Log_b M - Log_b N}$$

El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre el logaritmo del dividendo y el logaritmo del divisor, así tenemos:

Si Log 100=2 y Log 4= 0.6020599913.
Encuentre Log 25.

Log 25= $Log\left(\frac{100}{4}\right)$

Log 25= Log 100 – Log 4

Log 25= 2 - 0.6020599913

Log 25= 1.397940009

6.- $$\boxed{Log_b M^N = N * Log_b M}$$

El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base de la potencia, así tenemos:

Si Log 3= 0.4771212547. Encuentre Log 81.

Log 81= $Log3^4 = 4Log3$

Log 81= 4(Log3)

Log 81= 4(0.4771212547)

Log 81= 1.908485019

radicando

7.- $\boxed{Log_b \sqrt[N]{M} = \dfrac{Log_b M}{N}}$ índice

El logaritmo de una raíz es igual al logaritmo del radicando dividido para el índice del radical, así tenemos:

Si Log3= 0.4771212547 Encuentre $Log\sqrt[4]{3}$

$$Log\sqrt[4]{3} = \frac{Log3}{4}$$

$$Log\sqrt[4]{3} = \frac{0.4771212547}{4}$$

$$Log\sqrt[4]{3} = 0.1192803137$$

8.- $\boxed{Log_{b^L} M = \frac{1}{L} Log_b M = Log_b M^{1/L}}$

Así tenemos:

Si Log3 = 0.4771212547, encuentre $Log_{100} 3$

$$Log_{100} 3 = Log_{10^2} 3$$

$$Log_{100} 3 = \frac{1}{2} Log_{10} 3$$

$$Log_{100} 3 = \frac{1}{2} Log 3$$

$$Log_{100} 3 = \frac{1}{2} 0.4771212547$$

$$Log_{100} 3 = 0.2385606274$$

9.- $\boxed{b^{Log_b M} = M; b > 0, b \neq 1, M > 0}$

Así tenemos:

$$3^{Log_3 8} = 8$$

La base de la potencia es igual a la base del logaritmo.

10.- $Log_b M = \dfrac{Log_x M}{Log_x b}; b; x; M$ son números positivos $b \neq 1$ y $x \neq 1$

Así tenemos:

Si Log 4= 0.6020599913, Log 5= 0.6989700043.
Encuentre $Log_5 4$

$$Log_5 4 = \frac{Log 4}{Log 5}$$

$$Log_5 4 = \frac{0.6020599913}{0.6989700043}$$

11.- $M^{Log_b N} = N^{Log_b M}; M > 0, N > 0, b > 0$ y $b \neq 1$

Así tenemos:

$$9^{Log_4 64} = 2^{Log_4 16}$$

$$9^{\frac{Log 64}{Log 4}} = 2^{\frac{Log 16}{Log 4}}$$

$$9^{3\frac{Log 4}{Log 4}} = 27^{2\frac{Log 4}{Log 4}}$$

$$9^3 = 27^2$$

$$(3^2)^3 = (3^3)^2$$

$$3^6 = 3^6$$

12.- $\boxed{Log_{1/b}\, b = Log_b\left(\frac{1}{b}\right) = -1}$

Así tenemos:

$$Log_5\left(\frac{1}{3}\right) = Log_{1/3}(5) = -1$$

Restricciones en las variables

$Log_b a$, está definido cuando la base b es positiva y diferente de 1, y el argumento o valor de entrada a es positivo. Estas restricciones son resultado de la conexión entre logaritmos y exponentes:

Restricción	Razonamiento
b>0	En una función exponencial la base b debe ser positiva, por definición.
a>0	$Log_b a$ =c significa que $b^c = a.$ Como un número positivo elevado a cualquier potencia es positivo, o sea $b^c > 0,$ tenemos que a>0.
$b \neq 1$	Supongamos por un momento que b pudiera ser 1. Consideremos ahora la ecuación $Log_1 3 = x.$ La forma exponencial equivalente sería $1^x = 3.$ Pero esto nunca puede ser verdadero, pues 1 elevado a cualquier potencia es siempre 1. Así

	tenemos que $b \neq 1$.

Logaritmos especiales

Aunque la base de un logaritmo puede ser una de muchos valores, hay dos bases que se utilizan con mayor frecuencia.

En las calculadoras los botones más comunes son:

LOGARITMO COMÚN

Es un logaritmo cuya base es 10 (“logaritmo base 10”).

Al escribir estos logaritmos matemáticamente omitimos la base. Se entiende que es 10.

$$Log_{10}(x) = Log(x)$$

LOGARITMO NATURAL

Es un logaritmo cuya base es e (“logaritmo base e”).

En lugar de escribir la base e, indicamos este logaritmo como ln.

$$Log_{e}(x) = Ln(x)$$

Esta tabla resume lo que necesitamos saber acerca de estos dos logaritmos especiales:

Nombre	Base	Notación usual	Notación especial
Logaritmo común	10	$Log_{10}(x)$	Log(x)
Logaritmo natural	E	$Log_{e}(x)$	Ln(x)

Ecuaciones exponenciales con logaritmos

Resolver ecuaciones exponenciales de la forma

$a * b^x = d$

Ejemplo:

Resuelve $7 * 3^x = 567$

Para resolver para x primero debemos aislar la parte del exponente.

Para hacer esto, dividimos ambos lados por 7.

$$7 * \frac{3^x}{7} = \frac{567}{7}$$

$$3^x = 81$$

$$3^x = 3^4$$

Cuando las bases son iguales, los exponentes también lo son, por lo tanto:

X=4

También se puede aplicar el criterio de logaritmos, convirtiendo la ecuación a forma logarítmica.

$3^x = 81$ es equivalente a $\log_3 81 = x$

Luego tenemos que $x = \dfrac{\log 81}{\log 3} = 4$

Compruebe resultado en https://es.symbolab.com/

Ejercicios resueltos:

Redondear la respuesta a la milésima más cercana

1

¿Cuál es la solución de $2 * 6^x = 236$?

$$\frac{2 * 6^x}{2} = \frac{236}{2}$$

$$6^x = 118$$

$$x = \log_6 118$$

$$x = \frac{\log(118)}{\log(6)}$$

X=2.663

E2

¿Cuál es la solución de $5 * 3^t = 20$?

$$\frac{5*3^t}{5}=\frac{20}{5}$$

$$3^t=4$$

$$t=\log_3 4$$

$$t=\frac{\log(4)}{\log(3)}$$

X=1.262

E3

¿Cuál es la solución de $6*e^y=300$?

$$\frac{6*e^y}{6}=\frac{300}{6}$$

$$e^y=50$$

$$y=\ln(50)$$

$$x=\frac{\log(118)}{\log(6)}$$

y=3.912

Resolver ecuaciones exponenciales de la forma
$a*b^{cx}=d$

E1

¿Cuál es la solución de $6*10^{2x}=48$?

$$\frac{6*10^{2x}}{6}=\frac{48}{6}$$

$$10^{2x}=8$$

A continuación, aislamos el exponente convirtiendo a forma logarítmica.

$$2x=\log_{10}(8)$$

Luego dividir ambos lados entre 2

$$x=\frac{\log(8)}{2}$$

x=0.452

Ejercicios resueltos

E2

¿Cuál es la solución de $3*10^{4t}=522$?

$$\frac{3*10^{4t}}{3}=\frac{522}{3}$$

$10^{4t}=174$

$4t=\log(174)$ en forma logarítmica

$t=\dfrac{\log(174)}{4}$ despejando t

t= 0.560

E3

¿Cuál es la solución de $4*5^{2x}=300$?

$$\frac{4*5^{2x}}{4}=\frac{300}{4}$$

$5^{2x}=75$

$2x=\log_5(75)$ En forma logarítmica

$x=\dfrac{\log_5(75)}{2}$ Despejando t

x= 1.341

E4

¿Cuál es la solución de $-2*3^{0.2z}=-400$?

$$\frac{-2*3^{0.2z}}{-2}=\frac{-400}{-2}$$

$$3^{0.2z}=200$$

$0.2z=\log_3(200)$ En forma logarítmica

$$\frac{1}{5}z=\log_3(200)$$

$z=\dfrac{5*\log(200)}{\log(3)}$ Regla de cambio de base

x= 24.114

Compruebe resultado en https://es.symbol-ab.com/

Desafío y Tics

¿Cuál es la solución de $(2^x-3)(2^x-4)=0$?

Sabemos que $2^x-3=0$, ó $2^x-4=0$ -

Ahora podemos resolver cada ecuación para x.

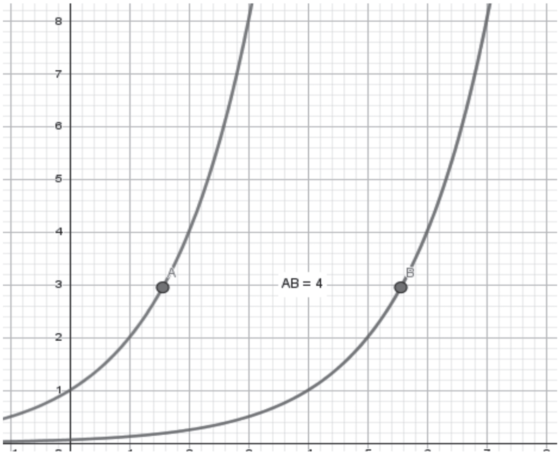
$2^x-3=0$	$2^x-4=0$
$2^x=3$	$2^x=4$
$x=\log_2 3$	$x=\log_2 4$
$x=\dfrac{\log 3}{\log 2}$	$x=\dfrac{\log 4}{\log 2}$
X= 1.585	x=2

Gráficas de funciones exponenciales

La gráfica de $y = 2^x$ se muestra abajo:

¿Cuál es la gráfica de $y = 3 * 2^{x-4} + 2$? Resolver de adentro hacia afuera como muestra la tabla:

X	$y = 2^x$	$y = 2^{x-4}$
0	1	0.0625
1	2	0.125
2	4	0.25
3	8	0.5
4	16	1
5	32	2



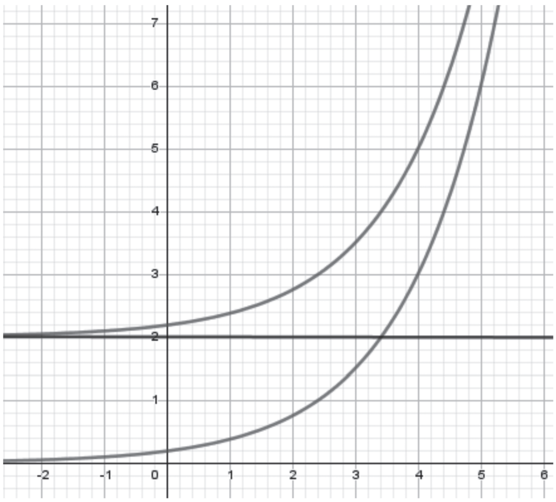
La gráfica indica que la curva se desplaza 4 unidades hacia la derecha. Ver tabla

X	$y=2^{x-4}$	$y=3*2^{x-4}$
0	0.0625	0.1875
1	0.125	0.375
2	0.25	0.75
3	0.5	1.5
4	1	3
5	2	6

Se observa que el valor en y ha sido triplicado

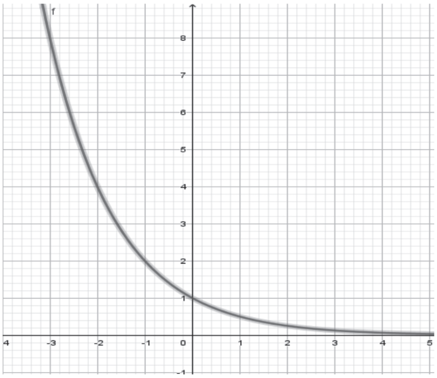
Finalmente, realizando la última comparación de acuerdo a la tabla siguiente

X	$y = 3 * 2^{x-4}$	$y = 3 * 2^{x-4} + 2$
0	0.1875	2.1875
1	0.375	2.375
2	0.75	2.75
3	1.5	3.5
4	3	5
5	6	8



Se puede concluir que la gráfica finalmente se desplaza hacia la izquierda apareciendo una nueva asíntota horizontal en 2 para la gráfica dada.

Ejemplo 2: La gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ se muestra a continuación:

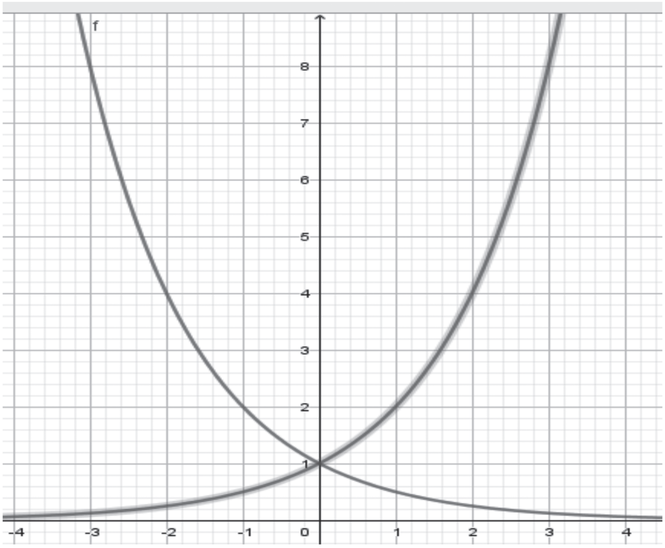


¿Cuál es la gráfica de $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{3-x} - 2$?

Resolver de adentro hacia afuera como muestra la tabla:

X	$y = \left(1/2\right)^{x}$	$y = \left(1/2\right)^{-x}$
0	1	1
1	0.5	2
2	0.25	4
3	0.125	8

4	0.0625	16
5	0.03125	32

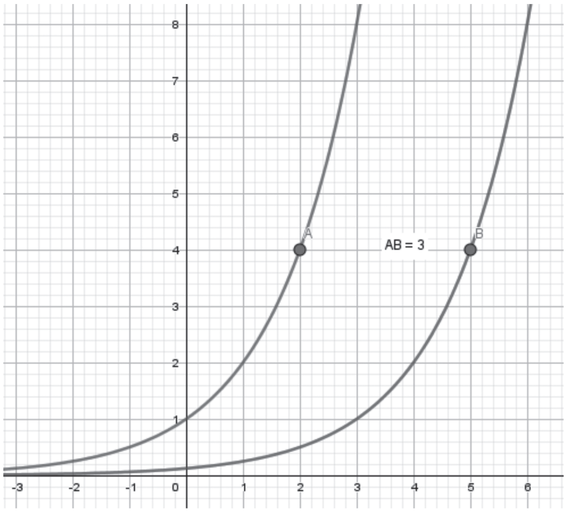


La gráfica indica que la curva se refleja respecto al eje vertical (y).

Ahora tomando en cuenta la siguiente tabla comparativa

x	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}$	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$
0	1	0.125
1	2	0.25

2	4	0.5
3	8	1
4	16	2
5	32	4

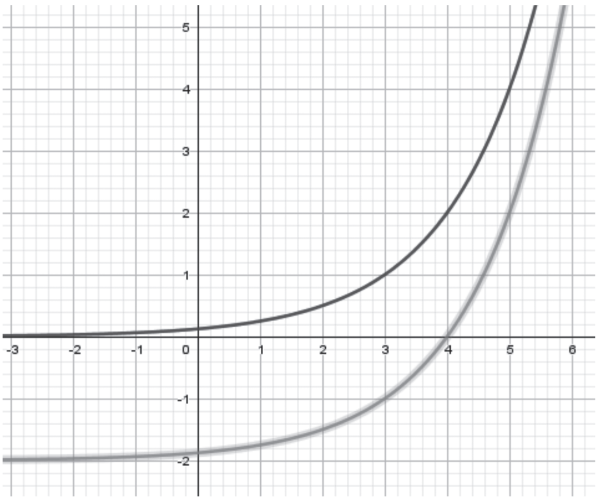


Se observa que la función es trasladada 3 unidades hacia la derecha

Finalmente, realizando la última comparación de acuerdo a la tabla siguiente

X	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}$	$y=\left(\frac{1}{2}\right)^{3-x}-2$
0	0.125	-1.875

1	0.25	-1.75
2	0.5	-1.5
3	1	-1
4	2	0
5	4	2



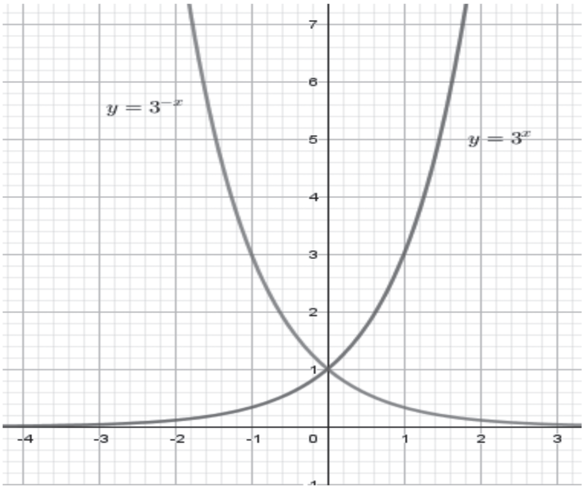
Se puede concluir que la gráfica finalmente se desplaza hacia la derecha apareciendo una nueva asíntota horizontal en -2 para la gráfica requerida.

Ejemplo 3: Esbozar la función de $y = 2 * 3^{-x} - 4$

Resolver de adentro hacia afuera como muestra la tabla:

x	$y = (3)^{x}$	$y = (3)^{-x}$

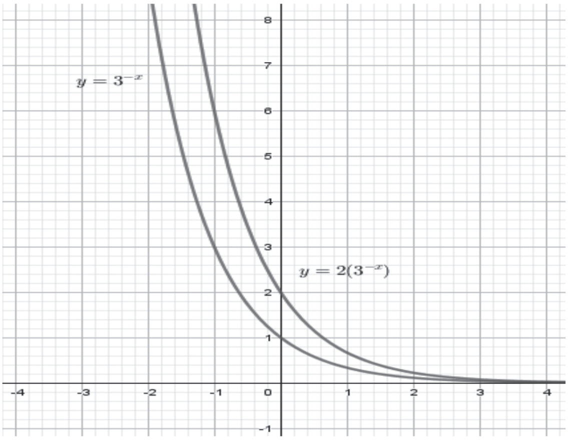
0	1	1
1	3	0.3333
2	9	0.1111
3	27	0.0370
4	81	0.0123
5	243	0.0041



La gráfica indica que la curva se refleja respecto al eje vertical (y).Ahora tomando en cuenta la siguiente tabla comparativa

X	$y = (3)^{-x}$	$y = 2 * (3)^{-x}$
0	1	2

1	0.3333	0.6666
2	0.1111	0.2222
3	0.0370	0.0741
4	0.0123	0.0247
5	0.0041	0.0082

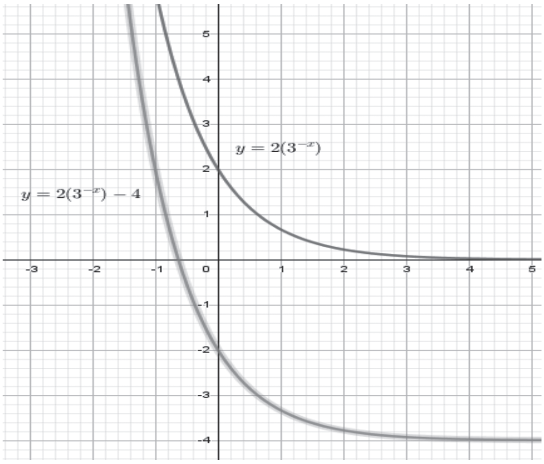


Se observa que los valores de la función se duplicaron.

Finalmente realizando la última comparación de acuerdo a la tabla siguiente.

X	$y = 2*(3)^{-x}$	$y = 2*(3)^{-x} - 4$
0	2	-2
1	0.6666	-3.3333

2	0.2222	-3.7777
3	0.0741	-3.9259
4	0.0247	-3.9753
5	0.0082	-3.9918



Se puede concluir que la gráfica finalmente se desplaza hacia la izquierda apareciendo una nueva asíntota horizontal en -4 para la gráfica requerida.

Gráficas de funciones logarítmicas

Relación entre logaritmos y exponenciales.

Primero se sugiere hacer una tabla para las funciones: $y = 3^x$, $y = Log_3 x$, respectivamente.

Empezamos con la función $y = 3^x$

X	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = 3^x$	$1/27$	$1/9$	$1/3$	1	3	9	27

Despejemos x de la función $y = 3^x$, con la ayuda de logaritmos tenemos:

$Log(y) = Log(3)^x$ aplicamos logartimo a ambos lados de la igualdad

$Log(y) = x * Log(3)$ el exponente se convierte en coeficiente (propiedad logarítmica)

$x = \frac{Log(y)}{Log(3)}$ despejando x

$x = Log_3(y)$ cambio de base (propiedad logarítmica)

$y = Log_3(x)$ cambiamos las variables por notación de función

Realizamos la nueva tabla para $y = Log_3(x)$, reemplazando los valores de y en x de la tabla anterior.

X	$1/27$	$1/9$	$1/3$	1	3	9	27
$y = Log_3(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3

Se puede concluir que los valores entre las variables de las funciones menciondas se intercambiaron.

Graficar funciones logarítmicas básicas

Ejemplo L1

Graficar la función $y = Log_5(x)$

Se sugiere transformar a su forma exponencial obteniendo la función $x = 5^y$

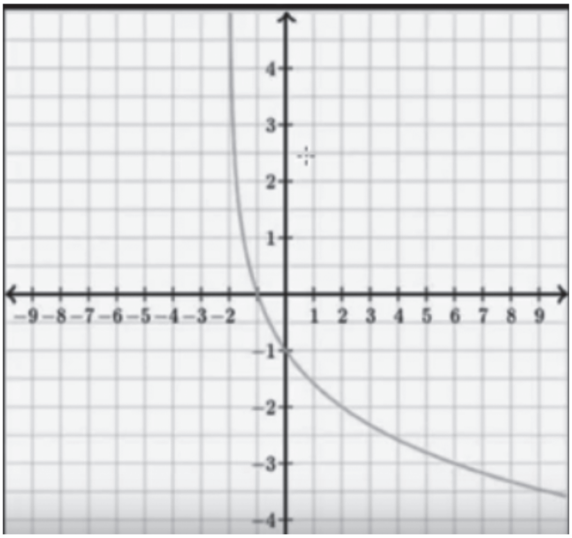
Realizamos la tabla dando valores a y para obtener los respectivos valores de x

y	-3	-2	-1	0	1	2	3
$x = 5^y$	$1/125$	$1/25$	$1/5$	1	5	25	125

Luego la gráfica nos queda

Ejemplo L2

Dada la gráfica a continuación, determinar cuál es la función representativa



a) $y = 1 + Log_2(x)$

b) $y = Log_2(x) - 1$

c) $y = -Log_2(x-2)$

d) $y = -Log_2(x+2)$

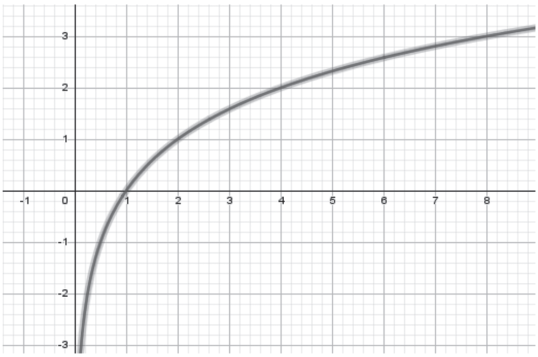
La parte común en todas las opciones es $y = -Log_2(x)$, por lo que empezar graficando esta parte es adecuado para llegar a nuestro resultado.

Para confeccionar la tabla hay que responder a la pregunta: ¿si x vale 8, entonces a que potencia debo elevar 2 para obtener dicho número? La respuesta es 3.

Así empezamos formando la tabla siguiente:

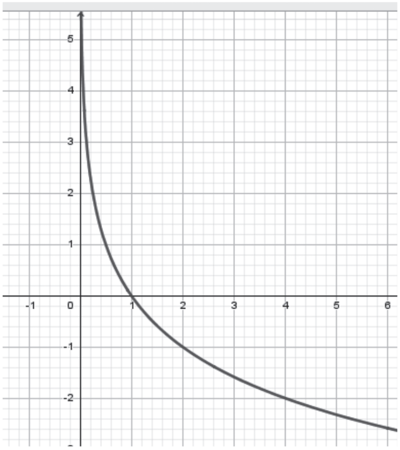
X	8	4	2	1	$1/2$	$1/4$	$1/8$
$y = Log_2(x)$	3	2	1	0	-1	-2	-3

La gráfica es:



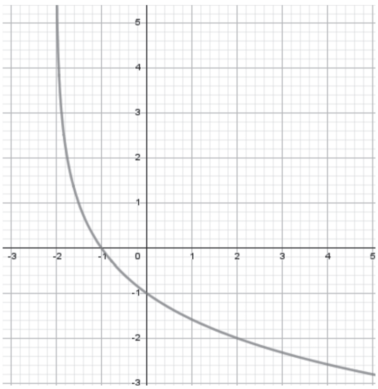
Luego qué sucede si a nuestra función la multiplicamos por -1

X	8	4	2	1	$1/2$	$1/4$	$1/8$
$y = -Log_2(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



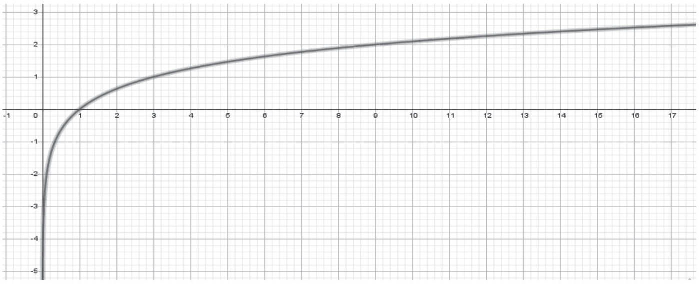
La gráfica muestra que los valores de la función cambian de posición respecto al eje x.

Finalmente, la función del ejercicio tiene como asíntota x=-2, por lo tanto la función que muestra este comportamiento es $y = -Log_2(x+2)$.

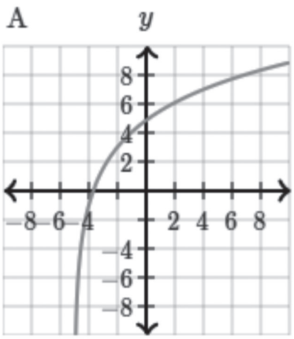


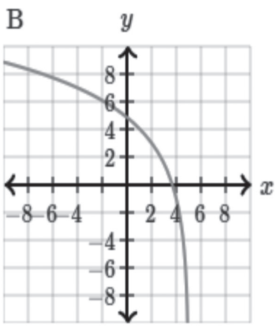
Taller de funciones logarítmicas para realizar en clase

1).- La gráfica $y = Log_3(x)$ se muestra a continuación.

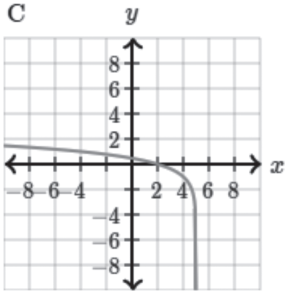


¿Cuál de las siguientes gráficas es $y = Log_3(x+5)-1$?

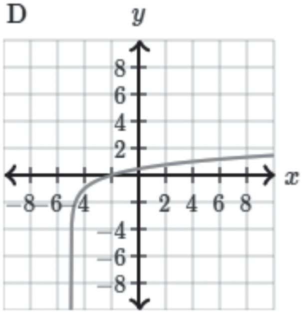




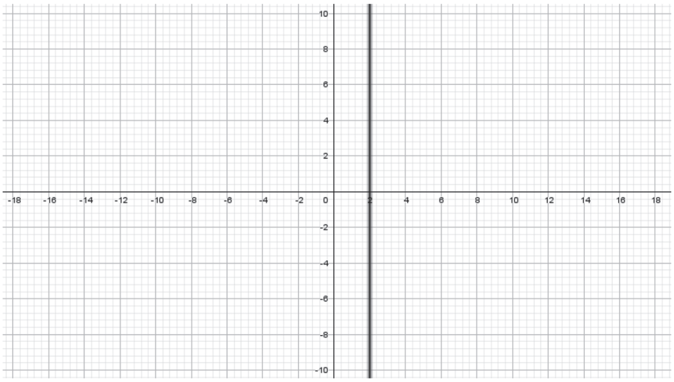
C



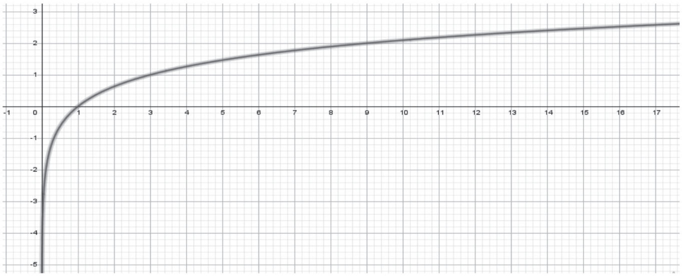
D



2).- Elaborar la gráfica de $y = 3Log_3(2 - x)$

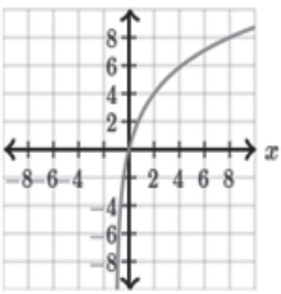


3).- La gráfica $y = Log_3(x)$ se muestra a continuación.

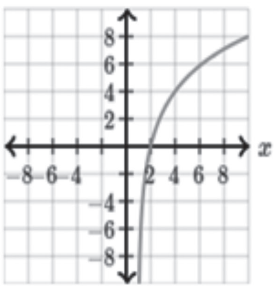


¿Cuál de las siguientes gráficas es $y = 4Log_3(x+1)$?

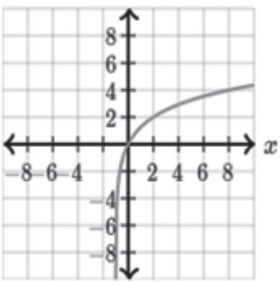
A



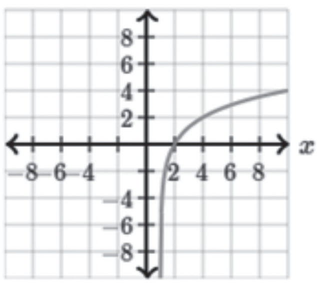
B



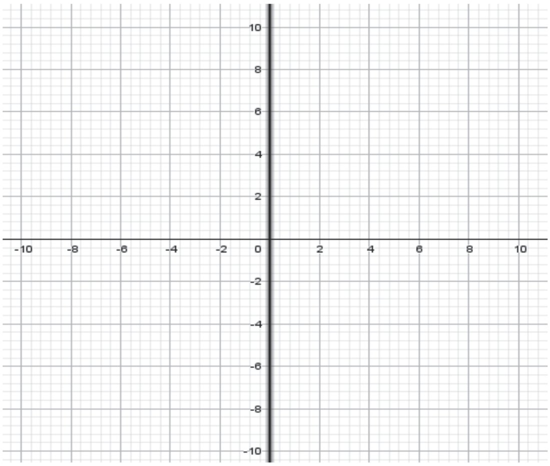
C



D

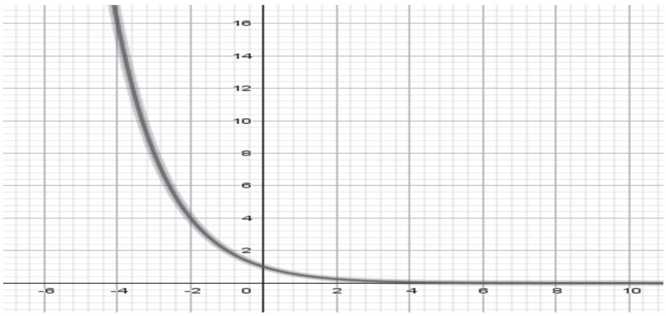


4).- Elaborar la gráfica de $y = 3Log_2(-x) - 9$



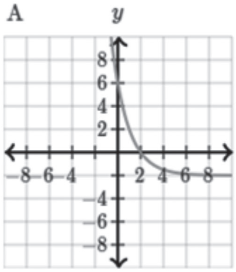
Trabajo autónomo capítulo III

1).- La gráfica $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{X}$ se muestra a continuación.

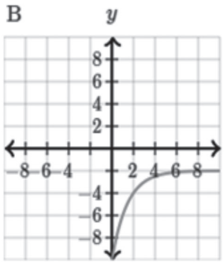


¿Cuál de las siguientes gráficas es
$y = 4Log_3(x+1)$?

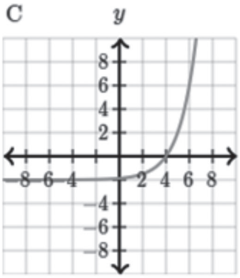
A



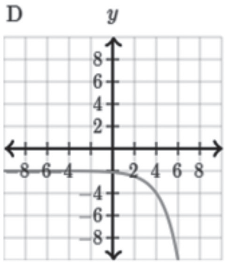
B



C



D



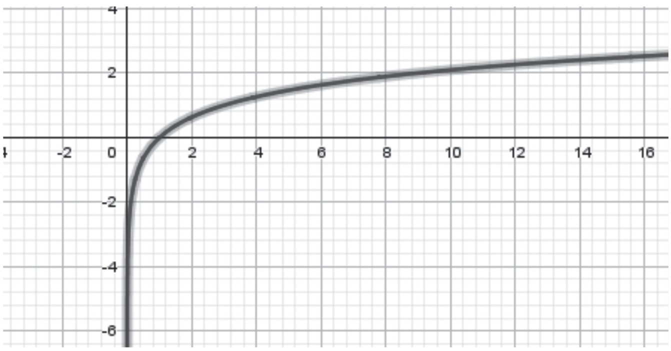
2).- ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a $Log_a(18) * Log_3(a)$?

A) 6
B) $Log(6)$
C) $Log_3(18)$
D) $Log_{18}(3)$

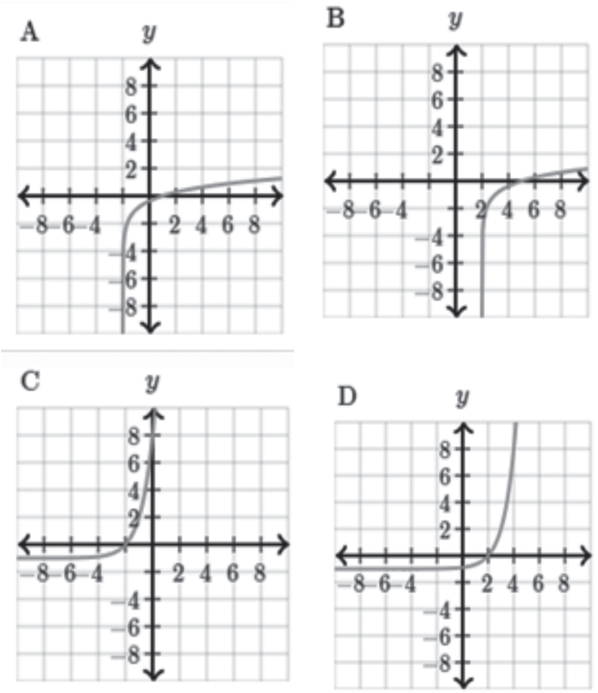
3).- Al evaluar el logaritmo $Log_5(200)$ a la milésima más cercana se obtiene:

A) 1.292
B) 3.292
C) 4.292
D) 5.292

4).- La gráfica $y = \log_3(x)$ se muestra a continuación.



¿Cuál de las siguientes gráficas es
$y = Log_3(x-2)-1$?



5).- Carlos ha tomado una dosis inicial de un medicamento por prescripción médica.

La relación entre el tiempo transcurrido t, en horas, desde que él tomó la primera dosis y la cantidad de medicamento M(t), en miligramos (mg), en su sangre se modela con la siguiente función.

$M(t) = 20 * e^{-0.8t}$

¿En cuántas horas a Carlos le restará 1 mg de medicamento en la sangre?

Redondea la respuesta a la milésima más cercana.

A) 3.740
B) 4.740
C) 5.740
D) 6.740

6).- Reescribe la siguiente expresión: $\log(2)+\log(4)$ en la forma log(c).

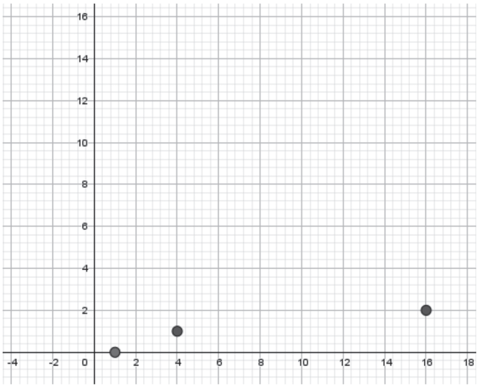
A) log(2)
B) log(4)
C) log(6)
D) log(8)

7).- Al evaluar la expresión $\log_3\left(\frac{1}{27}\right)$ se obtiene:

A) 2
B) -2
C) 3
D) -3

8).- Los 3 puntos trazados a continuación están en la gráfica de $\log_b(x)$.

Basándose solo en estos 3 puntos, traza los 3 puntos correspondientes que deben estar en la gráfica de $y=b^x$.



9).- Considera la ecuación $5*10^{z/4}=32$
Resuelve la ecuación para z. Redondea la respuesta a la milésima más cercana.
A) 6.225
B) 5.225
C) 4.225
D) 3.225

10).- Al simplificar

$$Log\left(\frac{m}{n}\right)+Log\left(\frac{n}{p}\right)+Log\left(\frac{p}{n}\right)-Log\left(\frac{ma}{nb}\right)$$, se

obtiene:

A) $Log\left(\frac{a}{b}\right)$

B) $Log\left(\frac{b}{a}\right)$

C) $Log(a*b)$

D) $\frac{Log(a)}{b}$

EVALUAR LAS SIGUIENTES EXPRESIONES

11).- $\log_5 125 =$ $\boxed{}$

12).- $\log_4 16 =$ $\boxed{}$

13).- $\log_3 9 =$ $\boxed{}$

14).- $\log_{10} 10000 =$ $\boxed{}$

EVALUAR CON CAMBIO DE BASE

15) $\log_{25} \frac{1}{5} =$ $\boxed{}$

16) $\log_{16} 4 =$ $\boxed{}$

17) $\log_{125} 5 =$ $\boxed{}$

18) $\log_8 2 =$ $\boxed{}$

Capítulo IV

Sistemas de ecuaciones lineales

- Ecuaciones lineales
- Definiciones básicas e interpretación de resultados
- Método de Gauss
- Operaciones fundamentales entre filas
- Taller con sistemas lineales
- Aplicaciones con sistemas lineales

Sistemas de ecuaciones lineales de orden nxn

Ecuaciones simultáneas o consistentes

Un sistema de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas, es simultáneo si se satisface para iguales valores de las incógnitas, así:

$$\begin{array}{l} 1. \\ 2. \end{array} \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Para el valor de 3 en x, 1 en y, ambas ecuaciones se satisfacen.

Ecuaciones equivalentes o dependientes

Son aquellas que obtienen una ecuación de la otra; además tienen soluciones comunes e infinitas, así:

$$\begin{array}{l} 1. \\ 2. \end{array} \begin{cases} 3x + 6y = 24 \\ \quad x + 2y = 8 \end{cases}$$

Si dividimos la ecuación 1 para 3 obtenemos la ecuación 2. Además, entre las soluciones tenemos:

$x = 0;$	$y = 4;$	$x = -2;$	$y = 5;$
$x = 8;$	$y = 0;$	$x = -4;$	$y = 6;$
$x = 4;$	$y = 2;$	$x = -6;$	$y = 7;$

Ecuaciones incompatibles o inconsistentes

Son aquellas ecuaciones que no tienen soluciones comunes, así:

$$\begin{matrix} 1. \\ 2. \end{matrix}\begin{cases} 3x - 2y = 10 \\ -6x + 4y = 15 \end{cases}$$

Es un sistema inconsistente porque no hay valor, tanto para x como para y, que satisfaga a ambas ecuaciones.

Solución de un sistema de ecuaciones

Es un grupo de valores de las incógnitas que satisface a todas las ecuaciones del sistema.

Así del sistema:

$$\begin{matrix} 1. \\ 2. \end{matrix}\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

Tenemos los valores 2 en x, 3 en y, lo cual es una solución del sistema porque satisfacen a las dos ecuaciones.

Al resolver un sistema de ecuaciones lineal pueden presentarse los siguientes casos:

Tiene una solución que es simultánea consistente.

No tiene solución que es incompatible o inconsistente.

Tiene infinitas soluciones, lo cual es equivalente, dependiente o indeterminado.

Finalmente, un sistema de ecuaciones es compatible si tiene una solución o infinitas soluciones.

Sistema de N ecuaciones simultáneas de primer grado con N incógnitas.

Existen varios métodos para resolver este tipo de sistemas, sin embargo en el presente texto se toma en consideración el método de Gauss siendo su base procedimental la matriz escalonada.

Dada una matriz aumentada generalizada:

$$\left(B\,x1 \quad + Cx2 \quad + Dx3.... \quad = TI\right)$$

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13}............. & ...b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}............. & ...b_{2n} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}............. & ...b_{mn} \end{array}\right)_{m*n}$$

Donde:

B, C, D, TI, representan los coeficientes de las variables de una ecuación lineal, mientras que TI su respectivo término independiente.

A representa al arreglo rectangular de números reales definidos en filas y/o columnas entre paréntesis.

A y b representan los elementos coeficientes de la matriz.

A son los coeficientes de cada una de las variables existentes en el sistema.

B son los coeficientes que representan los términos independientes de cada ecuación.

M es el número de filas.

N es el número de columnas.

M*n es el número de elementos que posee la matriz (orden de la matriz).

Para verificar el cambio de sistema a matriz aumentada, observe el siguiente cuadro:

Sistema	Matriz Aumentada
$3x-2y=4$ $x+3y=5$	$\left(\begin{array}{cc\|c} 3 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 5 \end{array}\right)$
Intercambiando la primera y segunda ecuaciones	Intercambiando la primera y segunda ecuaciones
$x+3y=5$ $3x-2y=4$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$
Sumando -3 veces la primera ecuación a la segunda:	Sumando -3 veces el primer renglón al segundo:
$x+3y=5$ $0x-11y=-11$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -11 & -11 \end{pmatrix}$
Dividimos ambos lados de la segunda ecuación entre -11:	Dividimos el segundo renglón entre -11:

$x+3y=5$ $0x+y=1$	$\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$
Restamos tres veces la segunda ecuación de la primera:	Restamos tres veces el segundo renglón del primero:
$x+0y=2$ $0x+y=1$	$\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$
Por tanto, la solución es x=2, y=1	

Una vez formada la matriz aumentada se procede a realizar las operaciones fundamentales entre filas:

1. Intercambio de dos ecuaciones
2. Multiplicación o división de una ecuación por una constante distinta de cero
3. Adición o sustracción de un múltiplo constante de una ecuación a (o de) otra ecuación.

Método de Gauss

Se sugiere seguir los siguientes pasos:

1. Formar una matriz con los coeficientes de las ecuaciones (ecuación igualada al término independiente). Escalonar la matriz mediante operaciones elementales entre filas.
2. El pivote deber ser 1 y pertenece siempre a la diagonalidad principal.
3. Una vez que el pivote sea uno debe hacerse cero a los elementos que están debajo.

Aplicaciones con sistemas de n ecuaciones con n incógnitas.

Resuelva el siguiente sistema mediante la reducción de filas (método de Gauss)

1) $$\begin{cases} -2x-3y+6z=6 \\ -x-2y+4z=5 \\ x+2y-3z=-4 \end{cases}$$

Primero, procedemos a formar la matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} x & y & z= & ti \\ -2 & -3 & +6 & +6 \\ -1 & -2 & +4 & +5 \\ +1 & +2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Identificamos la diagonal principal (elementos en donde la posición de fila es igual a la posición de la columna).

	x	y	z	=ti
F1	-2	-3	6	6
F2	-1	-2	4	5
F3	1	2	-3	-4

Luego, el valor de a_{11} debe ser igual a uno (elemento pivote).

	x	y	z	=ti
F1	1	2	-3	-4
F2	-1	-2	4	5
F3	-2	-3	6	6

$F1 \rightarrow F3$

F1 cambia por F3

$F3 \rightarrow F1$

F3 cambia por F1

Obtenemos las nuevas F2 y F3, siendo la matriz actualizada:

	x	y	z	=ti
F1	1	2	-3	-4
F2	0	0	1	1
F3	0	1	0	-2

$$F2 \to F1(1) + F2$$

$$\begin{array}{cccc} +1 & +2 & -3 & -4 \\ -1 & -2 & +4 & +5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$F3 \to F1(2) + F3$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 4 & -6 & -8 \\ -2 & -3 & 6 & 6 \\ \hline 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}$$

La matriz está escalonada cuando los elementos de la diagonal principal son respectivamente uno positivo.

	x	y	z	=ti
F1	1	2	-3	-4
F2	0	1	0	-2
F3	0	0	1	1

F2 cambia por F3

F3 cambia por F2

Finalmente, se resuelven las ecuaciones obtenidas con el escalonamiento de abajo hacia arriba.

Ecuación formada en F3: $0x \quad +0y \quad +1z \quad =1$

Por lo tanto $z=1$

Ecuación formada en F2: $0x \quad +1y \quad +0z \quad =-2$

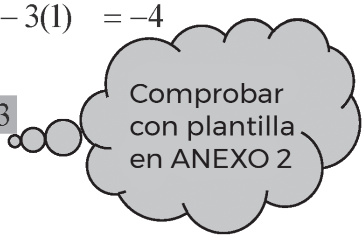
Por lo tanto $y=-2$

Ecuación formada en F3: $1x \quad +2y \quad -3z \quad =-4$

Reemplazando los valores encontrados tenemos:

$$1x \quad +2(-2) \quad -3(1) \quad =-4$$

Por lo tanto $x=3$



La solución es (3;-2;1)

formulario VB

Resuelva el siguiente sistema mediante la reducción de filas (método de Gauss)

2) $$\begin{cases} +1x+1y+1z+2w=11 \\ +2x-3y+2z-2w=1 \\ +1x-4y+1z+4w=-2 \\ +3x-2y+5z-1w=15 \end{cases}$$

Primero, procedemos a formar la matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} +x & +y & +z & +w & =ti \\ +1 & +1 & +1 & +2 & +11 \\ +2 & -3 & +2 & -2 & +1 \\ +1 & -4 & +1 & +4 & -2 \\ +3 & -2 & +5 & -1 & +15 \end{pmatrix}$$

Identificamos la diagonal principal (elementos en donde la posición de fila es igual a la posición de la columna).

Luego, el valor de a_{11} debe ser igual a uno (elemento pivote), caso contrario debemos transformarlo.

	x	y	z	w	=ti
F1	1	1	1	2	11
F2	2	-3	2	-2	1
F3	1	-4	1	4	-2
F4	3	-2	5	-1	15

Trabajamos con la primera columna, haciendo ceros a los elementos que se encuentran debajo del elemento pivote(a_{11})

	x	y	z	w	=ti
F1	1	1	1	2	11
F2	0	-5	0	-6	-21
F3	0	-5	0	2	-13
F4	0	-5	2	-7	-18

$$F2 \rightarrow F1*(-2)+F2$$

$$\begin{array}{ccccc} -2 & -2 & -2 & -4 & -22 \\ +2 & -3 & +2 & -2 & +1 \\ \hline 00 & -5 & 00 & -6 & -21 \end{array}$$

$$F4 \rightarrow F1*(-3)+F4$$

$$\begin{array}{ccccc} -3 & -3 & -3 & -6 & -33 \\ +3 & -2 & +5 & -1 & +15 \\ \hline 00 & -5 & +2 & -7 & -18 \end{array}$$

$$F3 \rightarrow F1*(-1)+F3$$

$$\begin{array}{ccccc} -1 & -1 & -1 & -2 & -11 \\ +1 & -4 & +1 & +4 & -2 \\ \hline 00 & -5 & 00 & +2 & -13 \end{array}$$

Luego, el valor a_{22} debe ser igual a uno (elemento pivote), caso contrario debemos transformarlo.

	x	y	z	w	=ti
F1	1	1	1	2	11
F2	0	1	0	1,2	4,2
F3	0	0	0	8	8
F4	0	0	2	-1	3

$$F2 \rightarrow (F2)/(-5)$$

$$\begin{array}{ccccc} 00 & -5 & 00 & -6 & -21 \\ \div -5 & \div -5 & \div -5 & \div -5 & \div -5 \\ \hline 00 & +1 & 00 & 1.20 & +4.2 \end{array}$$

Los elementos debajo del pivote (a_{22}) deben ser ceros. En este caso omitimos ese paso.

El nuevo pivote a_{33} debe ser diferente de cero, realizando la siguiente operación.

	x	y	z	w	=ti
F1	1	1	1	2	11
F2	0	1	0	1,2	4,2
F3	0	0	2	-1	3
F4	0	0	0	8	8

$F3 \rightarrow (F4)$ F3 cambia por F4

$F4 \rightarrow (F3)$ F4 cambia por F3

El pivote (a_{33}) debe ser cero. En este caso realizamos la siguiente operación:

	x	y	z	w	=ti
F1	1	1	1	2	11
F2	0	1	0	1,2	4,2
F3	0	0	1	-0,5	1,5
F4	0	0	0	8	8

$F3 \rightarrow F3 \div (2)$

$$\begin{array}{ccccc} 00 & 00 & +2 & -1 & +3 \\ \div 2 & \div 2 & \div 2 & \div 2 & \div 2 \\ \hline 00 & 00 & +1 & -0.5 & +1.5 \end{array}$$

El nuevo pivote es (a_{44}) pero debe ser igual a cero, para lo cual realizamos la siguiente operación.

	x	y	z	w	=ti
F1	1	1	1	2	11
F2	0	1	0	1,2	4,2
F3	0	0	1	-0,5	1,5
F4	0	0	0	1	1

$$F4 \rightarrow F4 \div (8)$$

$$\begin{array}{ccccc} 00 & 00 & 00 & +8 & +8 \\ \div 8 & \div 8 & \div 8 & \div 8 & \div 8 \\ \hline 00 & 00 & 00 & +1 & +1 \end{array}$$

Finalmente, se resuelven las ecuaciones obtenidas con el escalonamiento, de abajo hacia arriba.

Ecuación formada en F4: $0x \quad +0y \quad +0z \quad +1w \quad =1$

Por lo tanto $w=1$

Ecuación formada en F3: $0x \quad +0y \quad +1z \quad -0.5w \quad =1.5$

Reemplazando el valor de w $1z \quad -0.5(1) \quad =1.5$

tenemos:

$$z=2$$

Ecuación formada en F2: $0x \quad +1y \quad +0z \quad +1.2w \quad =4.2$

Reemplazando el valor de w encontrado tenemos:

$$1y + 1.2(1) = 4.2$$

Por lo tanto $\boxed{y = 3}$

Ecuación formada en F1: $1x \quad +1y \quad +1z \quad +2w \quad =11$

Reemplazando los valores encontrados tenemos:

$$1x \quad +1(3) \quad +1(2) \quad +2(1) \quad =11$$

Por lo tanto $\boxed{x = 4}$

La solución es (4;3;2;1)

Verifique la respuesta obtenida mediante el siguiente enlace:

Compruebe resultado en
http://matrixcalc.org/es/slu.htm
l

Taller de resolución de ecuaciones n*n

Resuelva el sistema dado (si la solución existe) usando el método de reducción de renglones (Gauss-Jordan)

$$\begin{array}{llll} 2u & -3v & +4w & =13 \\ u & +v & +w & =6 \\ -3u & +2v & +w & +1=0 \end{array}$$

Sol: (u=2; v=1; w=3)

$$\begin{array}{llll} x & +2y & +z & -t=0 \\ & +y & -2z & +2t=13 \\ 2x & +4y & -z & +2t=19 \\ & y & -z & -3t=0 \end{array}$$

Sol: (x=29/11; y=17/11; z=-43/11; t=20/11)

Trabajo autónomo capítulo IV

Resuelve el sistema de ecuación lineal por el método de reducción (Gauss):

1.- $\begin{cases} 3x - 5y = 4 \\ 2x + 3y = 9 \end{cases}$ Resp: $\begin{Bmatrix} x = 3 \\ y = 1 \end{Bmatrix}$

2.- $\begin{cases} 2x + 4y = -8 \\ 5x + 2y = 4 \end{cases}$ Resp: $\begin{Bmatrix} x = 2 \\ y = -3 \end{Bmatrix}$

3.- $\begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 3x + 2y = 1 \end{cases}$ Resp: $\begin{Bmatrix} x = -1 \\ y = 2 \end{Bmatrix}$

4.- $\begin{cases} 2x - y + 3z = 5 \\ 3x + 2y - z = -2 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{cases}$ Resp: $\begin{Bmatrix} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{Bmatrix}$

5.- $\begin{cases} x - 2y + 3z = -4 \\ 2x + 3y + 4z = 3 \\ 3x - 5y - 2z = 11 \end{cases}$ Resp: $\begin{Bmatrix} x = 4 \\ y = 1 \\ z = -2 \end{Bmatrix}$

6.- $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = -4 \\ 3x - 2y + z = 2 \\ x - 4y + 2z = -1 \end{cases}$ Resp: $\begin{Bmatrix} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{Bmatrix}$

7.- $\begin{cases} 2w - x + y - 2z = -6 \\ w - 2x + 2y = -3 \\ -w + x + z = 2 \\ -2w - y - z = -3 \end{cases}$ Resp: $\begin{Bmatrix} w = 1 \\ x = 0 \\ y = -2 \\ z = 3 \end{Bmatrix}$

8.- $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 4 \end{cases}$ Resp: $\begin{Bmatrix} x_1 = -1 - x_4 \\ x_2 = 3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 \\ x_4 = x_4 \end{Bmatrix}$

9.- $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = -1 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -3 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 3 \end{cases}$ Resp: $\begin{Bmatrix} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \\ x_4 = 2 \\ x_5 = -1 \end{Bmatrix}$

10.- (Punto de equilibrio del mercado) Dos productos A y B compiten. Las demandas x_A y x_B de estos productos están relacionadas a sus precios P_A y P_B por las ecuaciones de demanda.

$$x_A = 17 - 2P_A + \frac{1}{2}P_B \qquad \text{y} \qquad x_B = 20 - 3P_B + \frac{1}{2}P_A$$

Las ecuaciones de la oferta son:

$$P_A = 2 + x_A + \frac{1}{3}x_B \qquad \text{y} \qquad P_B = 2 + \frac{1}{2}x_B + \frac{1}{4}x_A$$

Quedan los precios a los cuales las cantidades x_A y x_B estarán disponibles en el mercado. En el punto e equilibrio del mercado, las 4 ecuaciones deben satisfacerse (dado que la demanda y la oferta deben ser iguales). Calcule los valores de equilibrio de x_A, x_B, P_A, y P_B.

Resp: ($x_A = 4$, $x_B = 6$, $P_A = 8$, $P_B = 6$)

Capítulo V

Desigualdades lineales

- Desigualdades lineales
- Diagnóstico
- Definiciones básicas
- Ejemplos con inecuaciones
- Inecuaciones con valor absoluto
- Taller sobre desigualdades

Inecuaciones

Diagnóstico

1) $-3 < X-10$ Resp: $x>7$

2) ¿Cuáles valores de h satisfacen la siguiente desigualdad?

$$6 \geq \frac{h}{2}$$

a) h= 10

*b) h= 12

c) h= 14

d) h= 16

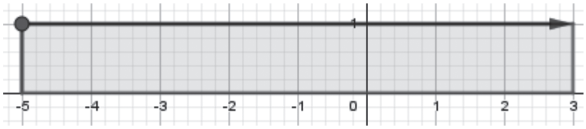
3) La guerra ruso-japonesa fue un conflicto que comenzó en el año de 1904.

Sea x tal que represente cualquier año. Escribe una desigualdad en términos de “x” y “1904”, que sea verdadera solamente para valores de x que representen años antes del comienzo de la guerra ruso – japonesa.

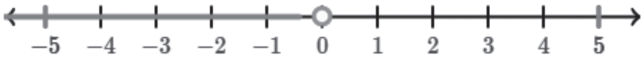
Resp: $x< 1904$.

4) Gráfica $x \geq -5$

Resp:



5) Gráfica x<0



Una inecuación es una desigualdad algebraica en la que dos de sus miembros aparecen ligados por uno de estos signos:

Símbolo	Lectura	Ejemplo
$<$	Menor que	$2x-1<7$
$\leq$	Menor o igual que	$2x-1 \leq 7$
$>$	Mayor que	$2x-1>7$
$\geq$	Mayor o igual que	$2x-1 \geq 7$

Inecuaciones equivalentes

Si a los dos miembros de una inecuación se les suma o resta un número, la inecuación resultante es equivalente a la dada.

Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o divide por un mismo número positivo, la inecuación resultante es equivalente a la dada.

Si a los dos miembros de una inecuación se les multiplica o divide por un mismo número negativo, la inecuación resultante cambia de sentido y es equivalente a la dada.

Resolución de inecuaciones de primer grado

1).- Quitar paréntesis

2).- Quitar denominadores

3).- Agrupar los términos en x a un lado de la desigualdad y los términos independientes en el otro.

4).- Efectuar las operaciones

5).- Cuando el coeficiente de la x es negativo multiplicamos por -1, por lo que cambiará el sentido de la desigualdad.

6).- Despejamos la incógnita.

Obtenemos la solución como una desigualdad, pero esta también podemos expresarla:

De forma gráfica

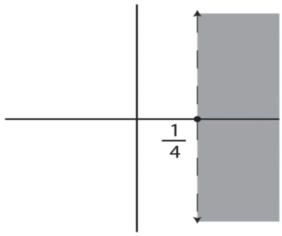
Como intervalo

Como desigualdad

Ejemplos:

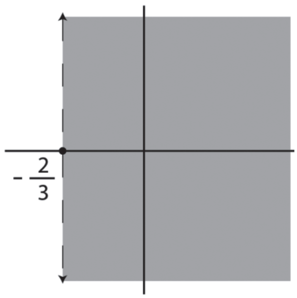
1) $x + 3 \leq 5x + 2$

$$x - 5x \leq 2 - 3$$
$$(-4x \leq -1)(-1)$$
$$4x \geq 1$$
$$x \geq \frac{1}{4}$$



2) $1 + x < 7x + 5$

$$x - 7x < 5 - 1$$
$$(-6x < 4)(-1)$$
$$6x > -4$$
$$x > -\frac{2}{3}$$



Inecuaciones de segundo grado

Se sugiere seguir los siguientes pasos:

1).- Igualar el polinomio del primer miembro a cero y obtenemos las raíces de la ecuación de segundo grado.

2).- Representamos estos valores en la recta real. Tomamos un punto de cada intervalo y evaluamos el signo en cada intervalo.

3).- La solución está compuesta por los intervalos (o el intervalo) que tenga el mismo signo que el polinomio.

Si el discriminante es igual a cero:

Expresión	Factorización	Solución
$x^2+2x+1 \geq 0$	$(x+1)^2 \geq 0$	$\Re$
$x^2+2x+1 > 0$	$(x+1)^2 > 0$	$\Re - \{-1\}$
$x^2+2x+1 \leq 0$	$(x+1)^2 \leq 0$	x=-1
$x^2+2x+1 < 0$	$(x+1)^2 < 0$	0

Cuando no tiene raíces reales, le damos al polinomio cualquier valor. Si el signo obtenido coincide con el de la desigualdad, la solución es $\Re$. En cambio, si el signo obtenido no coincide con el de la desigualdad, no tiene solución.

Expresión	Solución
$x^2 + x + 1 \geq 0$	$\Re$
$x^2 + x + 1 > 0$	$\Re$
$x^2 + x + 1 \leq 0$	0
$x^2 + x + 1 < 0$	0

1) $x^2 - 5x + 6 \leq 0$

$$(x-3)(x-2) \leq 0$$

$$x - 3 \leq 0$$

$$x \leq 3$$

$$x - 2 \leq 0$$

$$x \leq 2$$

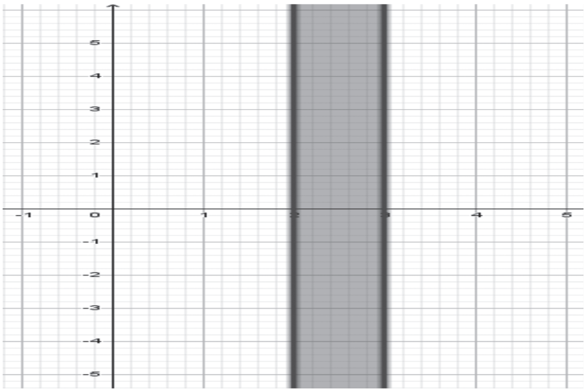
-∞ 0 2 2.5 3 4 +∞

(x-3)	-	+	-
(x-2)	-	+	+
(x-3)(x-2)	+	-	+

Según el cuadro, el signo "–" cumple con la condición "$\leq$", siendo la solución en desigualdad:

$$2 \leq x \leq 3$$

Solución gráfica:



Solución como intervalo: [2,3]

2) $(x+1)(x-2)(x+3)\geq 0$

Desigualando cada factor a cero tenemos:

$(x+1) \geq 0$

$x \geq -1$

$(x-2) \geq 0$

$x \geq 2$

$(x+3) \geq 0$

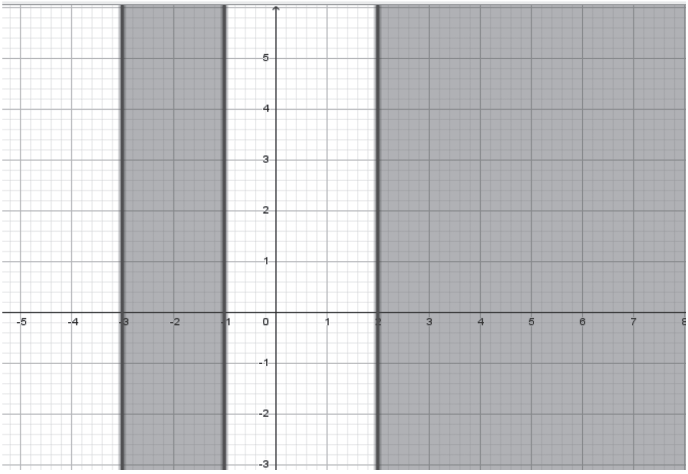
$x \geq -3$

	-∞ -4	-3 -2	-1 0	2 3 +∞
(x-2)	-	-	-	+
(x+1)	-	-	+	+
(x+3)	-	+	+	+
(x-2)(x+1)(x+3)	-	+	-	+

Según el cuadro el signo "+", cumple con la condición " ≥", siendo la solución en desigualdad:

$$-3 \leq x \leq -1 \qquad o \underline{\qquad} x \geq 2$$

Solución gráfica como:



Solución como intervalo: $[-3,-1]U[2,+\infty]$

Inecuaciones racionales

Se resuelven de un modo similar a las de segundo grado, pero hay que tener presente que el denominador no puede ser cero.

Se sugiere seguir los siguientes pasos:

1).- Hallamos las raíces del numerador y del denominador

2).- Representamos estos valores en la recta real, teniendo en cuenta que las raíces del denominador, independientemente del signo de la desigualdad, tienen que ser abiertas.

3).- Tomamos un punto de cada intervalo y evaluamos el signo en cada intervalo.

4).- La solución está compuesta por los intervalos (o el intervalo) que tengan el mismo signo que la fracción polinómica.

http://proyectodescartes.org/E-DAD/materiales_didacticos/E-DAD_4eso_ecuaciones_e_inecuaciones-JS-apli/index.htm

1) $\dfrac{x-2}{x-4} \geq 0$

$x - 2 = 0 \qquad x = 2$ Igualando a cero el numerador

$x - 4 = 0 \qquad x = 4$ Igualando a cero el denominador

Los puntos para analizar en la recta son:

Se debe evitar la división para cero, por lo tanto:

$\dfrac{x-2}{x-4} \geq 0 \qquad x \neq 4$

$x = 0 \qquad \dfrac{0-2}{0-4} > 0$

$x = 3 \qquad \dfrac{3-2}{3-4} < 0$

$x = 5 \qquad \dfrac{5-2}{5-4} > 0$

Solución como desigualdad:

S = (-∞, 2] ∪(4, ∞)

2) Resolver $\sqrt{2x+1} \geq 3$

Encontrar la región real: $\sqrt{2x+1}$

$2x+1 \geq 0$

$2x+1-1 \geq 0-1$ Restar 1 en ambos miembros

$2x \geq -1$ Al simplificar

$2x \geq -1$ Dividir ambos lados entre dos

$\frac{2x}{2} \geq -\frac{1}{2}$ al simplificar

$x \geq -\frac{1}{2}$

Simplificar y calcular $\sqrt{2x+1} \geq 3$

$\sqrt{2x+1} \geq 3$ elevar al cuadrado ambos miembros

$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 \geq 3^2$ simplificar

$2x+1 \geq 9$ restar 1 en ambos miembros

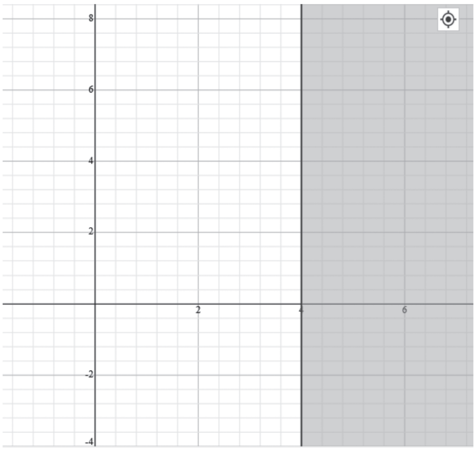
$2x+1-1 \geq 9-1$ simplificar

$2x \geq 8$ dividir ambos lados entre dos

$\frac{2x}{2} \geq \frac{8}{2}$ simplificar

Solución como desigualdad $x \geq 4$

Solución gráfica:



Solución como intervalo: $[4,+\infty)$

Inecuaciones con valor absoluto

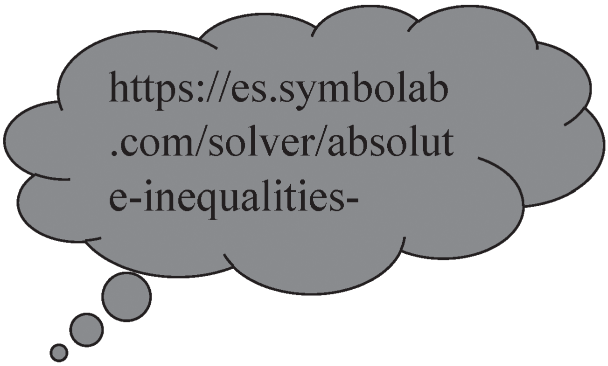
Cuando se resuelve desigualdades de valor absoluto, hay dos casos que considerar.

Caso 1: La expresión dentro de los símbolos de valor absoluto es positiva.

Caso 2: La expresión dentro de los símbolos de valor absoluto es negativa.

Si el símbolo de la desigualdad es (<), la respuesta está dada por la intersección de las soluciones de los dos casos dados.

Si el símbolo de la desigualdad es (>), la respuesta está dada por la unión de las soluciones de los dos casos dados, puesto que hay saltos en el resultado final.

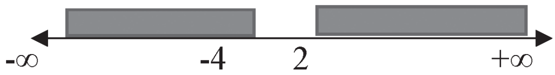


1) Resolver la siguiente desigualdad $|x+1| \geq 3$

$+(x+1) \geq 3$		$-(x+1) \geq 3$	
$x \geq 3-1$	Por definición de valor absoluto	$-x-1 \geq 3$	Por definición de valor absoluto
$x \geq 2$	restando 1 a cada miembro	$-x \geq 3+1$	sumando 1 a cada miembro
		$-x \geq 4$	Por (-1)
		$x \leq -4$	Cambia de sentido la desigualdad

Graficando las soluciones x≥ 2; $x \le -4$ tenemos:

Solución gráfica:



Solución como desigualdad: $x \le -4$ o $x \ge 2$

Solución como intervalo: (-∞,-4] U [2,∞)

Una de las formas dadas como solución es suficiente.

$$|3x+2| \ge 4$$

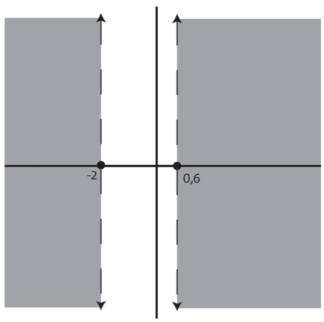
$$+(3x+2) \ge 4 \qquad -(3x+2) \ge 4$$

$$3x+2 \ge 4 \qquad -3x-2 \ge 4$$

$$3x \ge 2 \qquad (-3x \ge 6)(-1)$$

$$x \ge \frac{2}{3} \qquad 3x \le -6$$

$$x \le -2$$



Taller en clase

Exprese la respuesta en intervalo.

1) Encuentre todos los números reales que satisfagan la desigualdad

$3x+7>5x-1.$ R: $(-\infty,4)$

2) Resuelva la doble desigualdad en x.

$7 > 5 - 2x \geq 3$ R: $(-1,1]$

3) El fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce al precio de \$60 cada artículo. Gasta \$40 en materia prima y mano de obra al producir cada artículo y tiene costos adicionales (fijos) de \$3000 a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos \$1000 a la semana.

R: al menos \$200 por semana

4) Resuelva la desigualdad $5x \leq 2(x^2 - 6)$

R: $(-\infty, -3/2] U [4, \infty)$

Trabajo autónomo

1) 12t-2 < -5t+36 t< (38/17)

2) -42v+33 < 8v+91 v> (-29/25)

3) $54x+64 \geq 49x+59$ $x \geq -1$

4) $55c+13 \leq 75c+39$ $c \geq -13/10$

5) $55y+3 > -7y+13$ $y > 5/6$

6) $22q+73 > 52q+63$ $q < 1/3$

7) $-48t+2 \leq -71t+14$ $t \leq 12/23$

8) $60a+64 \geq 80a-92$ $a \leq 39/5$

Desigualdades compuestas

9) Resuelve para x.

$-6x+14 < -28$ O $9x+15 \leq -12$

a) $x \leq -3$ **O** $x > 7$ b) $-3 \leq x < 7$
c) $x < 7$ d) $x \geq -3$

10) Resuelve para x.

$3x-8 \leq 23$ Y $-4x+26 \geq 6$

a) $x \leq 31/3$ b) $5 \leq x \leq 31/3$ **c)** $x \leq 5$
d) $x \geq 3$

11) Resuelve para x.

$2x+3\geq 7$ O $2x+9>11$

a) $x>1$ b) $x\geq 2$ c) $x\leq 2$
d) $x<1$

12) Resuelve para x.

$-15x+60\leq 105$ Y $14x+11\leq -31$

a) $x\leq -3$ b) $x\geq -3$ **c)** $x=-3$
d) $x<-3$

13) El colegio "xyz" va a tener su baile anual de primavera, que costará $400. El estudiante que hace la labor de tesorero reportó que en el fondo para el baile quedaron $75 del año pasado. Cada boleto para el baile cuesta $4.

Sea t el número de boletos vendidos. Escribe una desigualdad para determinar cuántos boletos hay que vender para pagar el baile de este año.

R: 75+4t>=400

¿Cuál es el menor número natural de boletos que hay que vender para pagar el baile?

R: 81(1/4)=82

14) Resuelve para d.

Da una respuesta exacta en forma simplificada

$-23d+81 \leq -98d+1$

e) $d \leq \frac{15}{16}$ **f)** $d \leq -\frac{16}{15}$ g) $d \geq \frac{16}{13}$
h) $d \geq \frac{13}{16}$

15) La chef Amalia está cocinando para un desayuno de domingo. Sabe que 22 crepas pueden alimentar, como máximo, a 8 personas. ¿Cuál es el número máximo de personas que puede alimentar Amalia con 55 crepas?

a) 16 b) 18 **c)** 20 d) 22

16) Resuelve para z.

$\frac{z-4}{6} > \frac{7}{2}$

a) z <-20 b) z> 22 c) z< -23
d) z >25

17) Despeja f.

$11f = -7(1-2f)-5$, se cumple que:

f= $\boxed{}$

a) $f \leq 4$ b) $f \geq 4$ c) $f > 4$

d) $f < -4$

18) José desea realizar su sesión de brincos en el Centro de Trampolines Súper Rebote. José dispone de $43.25. Si el costo de entrada es de $7 y $1.25 por cada minuto que se encuentre en el trampolín, escribe una expresión algebraica que represente el número de minutos (t) que José puede permanecer en el trampolín.

$\boxed{}$ R: $7 + 1.25t \leq 43.25$

Encuentra el número de minutos máximo que puede permanecer en el trampolín.

$\boxed{}$ R: 29 minutos

19) Julia manejó su coche 81 km y usó 9 litros de gasolina. Quiere saber cuántos kilómetros (x) como máximo puede manejar con 22 litros de gasolina. Ella supone que su coche va a seguir consumiendo gasolina al mismo ritmo.

¿Qué tan lejos puede manejar Julia con 22 litros de gasolina?

a) 142 km b) 163 km c) 181 km
d) 198 km

20) Andrés va a abordar un avión. Tiene 2 maletas registradas, de pesos iguales, y una mochila que pesa 4 kg. El peso total del equipaje de Andrés no debe sobrepasar 35 Kg.

Escribe una desigualdad para determinar el peso, w, de cada una de las maletas registradas de Andrés.

R: $2w + 4 \leq 35$

Encuentra el peso máximo de cada una de sus maletas registradas.

R: 15.5 Kg.

21) Despeja f.

$3(6-f)-4<3f-4$

f= $\boxed{}$

a) f<-2 **b)** f>3 c) $f \leq$ -6 d) f>10

Resuelva las siguientes inecuaciones y exprese la solución como intervalos:

22) $4-3x \geq 6$ 128 $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$

23) $1+5x>5-3x$ 130 $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$

24) $1<3x+4 \leq 16$ 132 $(-1,4)$

25) $x^2<2x+8$ 134 $(-2,4)$

26) $x^2 \geq 5$ 136 $(-\infty,-\sqrt{5}]U[\sqrt{5},\infty)$

27) $x^3+3x<4x^2$ 140 $(-\infty,0]U(1,3)$

28) $-3<\frac{1}{x} \leq 1$ 142 $(-\infty,-1/3)U[1,\infty)$

29) $|x-6|<0.1$ 152 (5.9, 6.1)

30) $|x+1| \geq 3$ 154 $(-\infty,-4]$

31) $\sqrt{x-1}<4$ $x \in [1,17)$

32) $\sqrt{x^2+9}<5$ $\qquad x \in (-4,4)$

33) Un hombre tiene \$7000 para invertir. Quiere invertir parte al 8% y el resto al 10%. ¿Cuál es el monto máximo que debe invertir al 8% si desea un ingreso anual por interés de al menos \$600 anuales?

R: \$5000

34) Un fabricante puede vender todas las unidades que produce al precio de \$30 cada una. Tiene costos fijos de \$12 000 al mes; y además, le cuesta \$22 producir cada artículo. ¿Cuántas unidades puede producir y vender al mes la compañía para obtener utilidades?

R: 1 501 o más.

Respuestas:

Diagnóstico

1) Tabla I: 1.129, Tabla II: 13; 2)-3; 3) $\log(4)$; 4) (0,1); (1,2); (2,4); (3,8); (4,16); 5) log(5)

TRABAJO AUTÓNOMO CAP I

1) C; 2) C; 3)B; 4)B; 5)A; 6)D; 7)D; 8)(0,1);(1,4);(2,16); 9)D; 10)B; 11) 3; 12) 2; 13) 2; 14)4; 15) -0.5; 16) 0.5; 17) 1/3; 18) 1/3

TRABAJO AUTÓNOMO CAP II

1) (x,y)=(3,1); 2) (x,y)=(2,-3); 3) (x,y)=(-1,2); 4) (x,y,z)=(-1,2,3); 5) (x,y,z)=(4,1,-2); 6) (x,y,z)=(1,2,3); 7) (w,x,y,z)=(1,0,-2,3); 8) $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(-1-x_4,3+\frac{1}{2}x_4,-\frac{1}{2}x_4,x_4)$; 9) (x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=(2,1,3,2,-1); 10) $(x_A,x_B,P_A,P_B)=(4,6,8,6)$

TRABAJO AUTÓNOMO CAP III

1) $t<\frac{38}{17}$; 2) $v>-\frac{29}{25}$; 3) $x\geq -1$; 4) $c\geq -\frac{13}{10}$; 5) $y>\frac{5}{6}$; 6) $q<\frac{1}{3}$; 7) $t\leq \frac{12}{23}$; 8) $a\leq \frac{39}{5}$; 9) $x\leq -3$; 10) $x\leq 5$; 11) $x>1$; 12) $x=-3$; 13) $75+4t\geq 400$; $81\frac{1}{4}=82$; 14) $d\leq -\frac{16}{15}$; 15) 20; 16) $z>25$; 17) $f\leq 4$; 18) $7+1.25t\leq 43.25$; $29\_\min utos$; 19) $198km$; 20) $2w+4\leq 35$; $15.5kg$; 21) $f>3$; 22) $\left(-\infty,-\frac{2}{3}\right)$; 23) $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$; 24) (-1,4); 25) (-2,4); 26) $(-\infty,-\sqrt{5}]U[\sqrt{5},\infty)$; 27) $(-\infty,0]U(1,3)$; 28) $\left(-\infty,-\frac{1}{3}\right)U[1,\infty)$; 29) (5.9,6.1); 30) $(-\infty,-4]$; 31) $x\in[1,17)$; 32) $x\in(-4,4)$; 33) \$5000; 34) 1501 o más.

BIBLIOGRAFÍA

Para esta obra se consideraron algunos ejercicios y definiciones básicas de libros del área de Matemática – detallados a continuación, así como el apoyo informático en calculadoras matemáticas en línea, en programas de software de libre acceso como Symbolab, las gráficas en aplicaciones realizadas con Geogebra, y en enlaces de internet que buscan reforzar definiciones principales.

Además, se fomenta el uso y apoyo académico en las plataformas virtuales de e-learning de acceso libre en internet como: Coursera, Khan Academy, Udacity, edX, ck12, Miriadax, para el uso de videos tutoriales, ejercicios desarrollados y dinámicos.

De igual manera, se proporciona una aplicación para sistemas lineales, realizada por los autores en Excel de Windows, bajo la codificación de Visual Basic para que el estudiante verifique las respuestas de los sistemas propuestos.

Allen, A. R. (2013). *Álgebra elemental* (cuarta ed.). México D.F.: CENGAGE LEARNING.

Arya, J. C., & Lardner, R. W. (2009). *Matemáticas aplicadas a la administración y a la economía* (quinta ed.). Naucalpan de Juárez: Cámara nacional de la industria editorial mexicana.

Aufmann, R. N., & Lockwood, J. S. (2013). *Álgebra elemental* (octava ed.). México D.F.: CENGAGE LEARNING.

Bali, E., Caglar, O., & Biyani, G. (2007). *The academy of you*. Recuperado el 10 de 12 de 2017, de www.udemy.com

CENTRO NACIONAL DE INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN EDUCATIVA DEL MINISTERIO DE EDUCACIÓN DE ESPAÑA. (1998). *Proyecto Descartes*. Recuperado el 16 de marzo de 2018, de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

De Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., & Carrillo, Á. (2007). *Álgebra* (quinta ed.). México D.F.: Prentice Hall.

EqsQuest Ltd. (2011). *Calculadora paso por paso*. Recuperado el 21 de junio de 2017, de https://es.symbolab.com/solver

Geogebra aplicaciones clásicas. (28 de enero de 2002). Recuperado el 18 de julio de 2017, de https://www.geogebra.org/classic

Instituto de massachusetts y universidad de Harvard. (1 de mayo de 2012). *EDX*. Recuperado el 4 de febrero de 2017, de https://www.edx.org/es/xseries/bases-matematicas-para-estudiar

Khan, S. (2006). *KHAN ACADEMY*. Recuperado el 15 de 5 de 2017, de https://es.khanacademy.org/

Khosla, N., & Pal, M. (2007). *CK-12*. Recuperado el 13 de mayo de 2017, de https://www.ck12.org/c/algebra/factoring-polynomials/lecture/Factoring-by-Grouping-and-Factoring-Completely/?referrer=concept_details

Lipschutz, S. (1976). *Teoría de conjuntos y temas a fines* (primera ed.). México D.F.: McGraw-Hill.

Lipschutz, S. (26 de noviembre de 2018). *Soporte - Bibliolatino.com*. Obtenido de http://www.redbiblioucacue.com/opac_css/index.php?lvl=notice_display&id=37247

Martinez, A. (s.f.). *Resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales Online1*. Recuperado el 1 de 09 de 2018, de https://es.scribd.com/document/240456521/Resolver-Sistemas-de-Ecuaciones-Lineales-Online1

Ng, A., Koller, D., & Levin, R. (26 de noviembre de 2012). *Coursera*. Recuperado el 20 de abril de 2017, de https://www.coursera.org/learn/pre-calculus?

Phillips, E. P., Butts, T., & Shaughnessy, M. (2003). *Álgebra con aplicaciones* (primera ed.). México D.F.: Harla.

Rees, P. K., Sparks, F. W., & Sparks Rees, C. (1991). *Álgebra* (décima ed.). México D.F.: McGraw-Hill.

Repetto, C. H., Linskens, M. E., & Fesquet, H. B. (1967). *Matemática moderna aritmética 2* (primera ed.). Buenos Aires: Kapelusz.

Solis Zambrano, A. (2010). *Matemática II por competencia* (primera ed.). Guayaquil: EDISOL edisciones Solis.

Stewart, J., Redlin, L., & Watson, S. (2012). *Precálculo matemáticas para el cálculo* (sexta ed.). México D.F.: OVA.

Telefónica learning services y fundación CSEV. (10 de enero de 2013). *MIRIADAX_*. Recuperado el 2 de febrero de 2017, de https://miriadax.net/web/preparacion-para-las-matematicas-de-nivel-universitario/inicio

Tussy, A. S., Gustafson, D. R., & Koenig, D. (2013). *Matemáticas básicas* (cuarta ed.). México D.F.: CENGAGE.

Vitutor SLU. (2002). *DITUTOR*. Recuperado el 14 de SEPTIEMBRE de 2018, de https://www.ditutor.com/numeros_racionales/amplificacion_fracciones.html

Vitutor SLU. (2002). *VITUTOR*. Recuperado el 23 de agosto de 2018, de https://www.vitutor.com/al/log/ecuContenidos.html

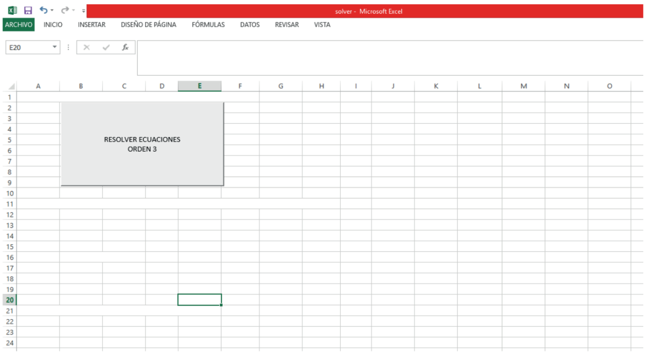
YKENNEDY, G., Foley, B., & Waits, D. F. (2007). *Precálculo: gráficas, numércio, algebraico* (séptima ed.). México D.F.: Pearson educación.

ANEXOS

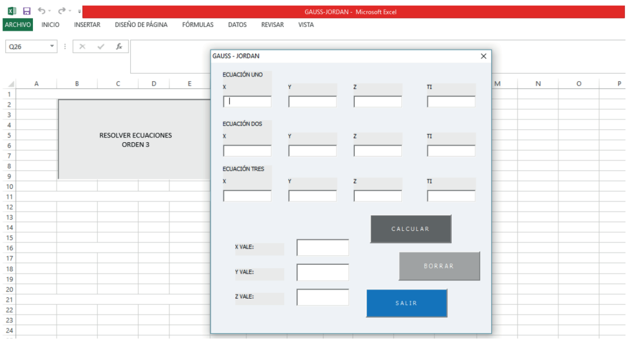
Anexo 1

Seleccionar pestaña SISTEMA_ORDEN_3

Dar clic en el botón RESOLVER



Ingresar los coeficientes de cada ecuación igualada a cero en el formulario.

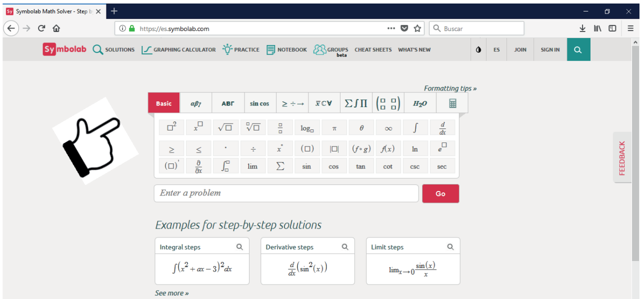


Comprobar el resultado con el botón CALCULAR

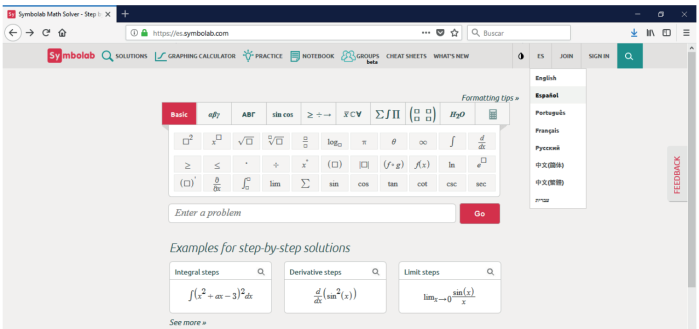
Anexo 2

GP1: es.symbolab.com

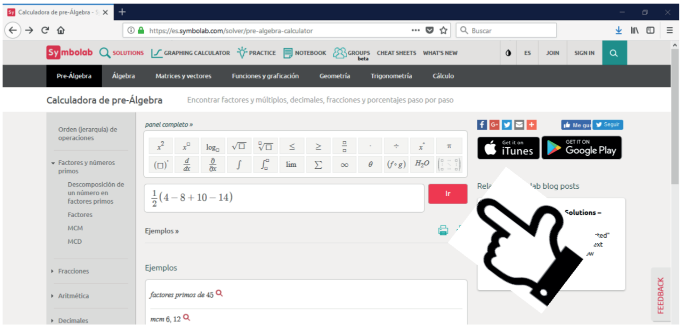
Digitar en el buscador es.symbolab.com



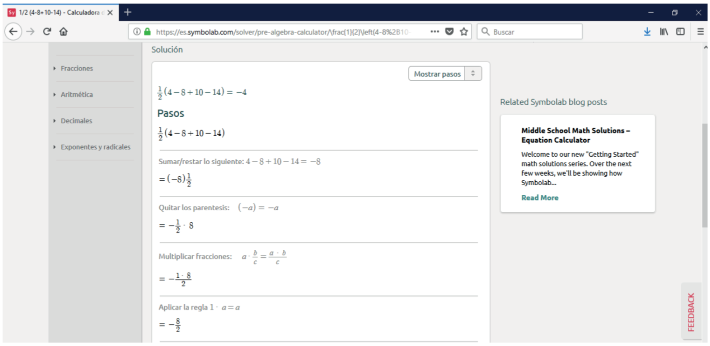
Seleccionar idioma Español



Ingresar el problema a resolver en la barra de entrada del programa presionando en el botón Ir



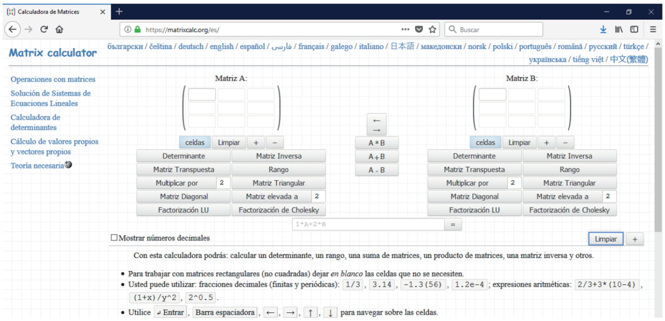
El resultado obtenido es -4



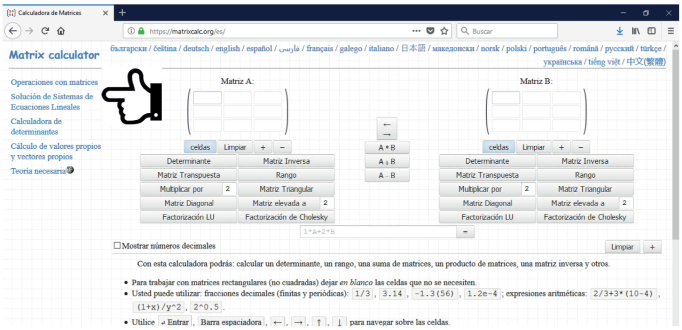
Anexo 3

GP2: matrixcalc.org/es

Digitar en el buscador matrixcalc.org/es

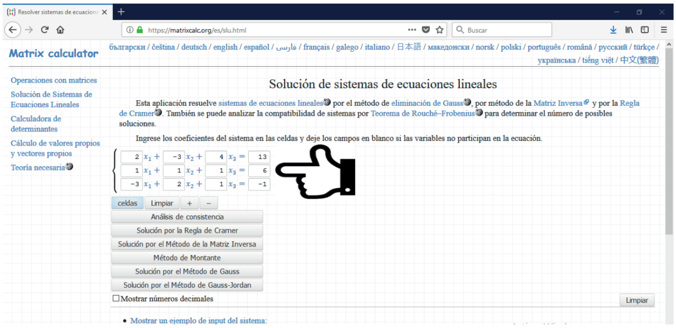


Seleccionar en el menú izquierdo la opción Solución de Sistemas de Ecuaciones Lineales



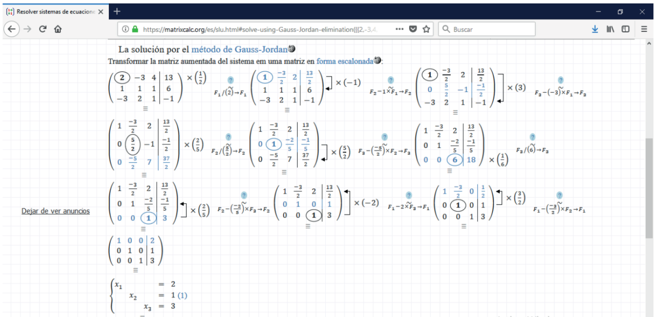
Definir el número de filas para el sistema

Ingresar los coeficientes respectivos



Seleccionar el método estudiado Gauss–Jordan

Resultado generado por el programa

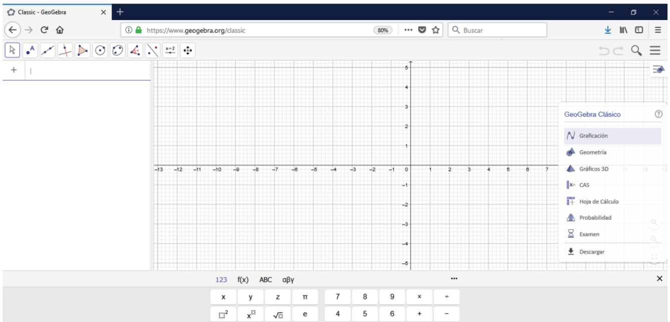


Se debe tomar en cuenta las variables originales para interpretar la solución:

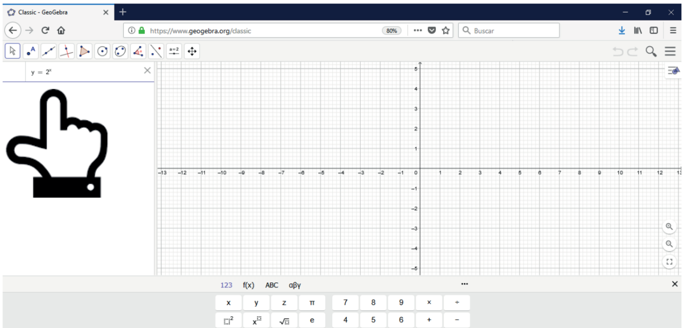
x1=u=2; x2=v=1; x3=w=3

Anexo 4: geogebra.org/classic

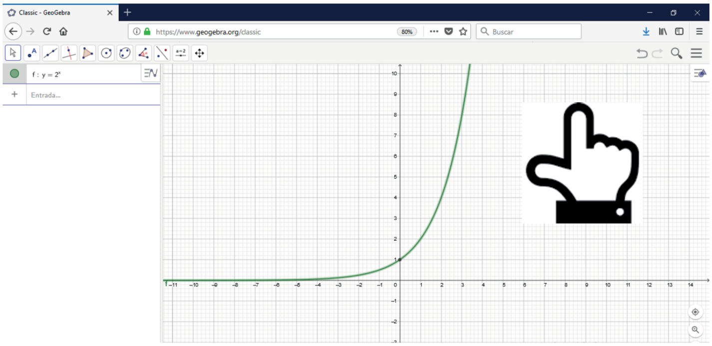
Ingresar en el buscador de internet geogebra.org/classic



Ingresar la expresión a graficar en la entrada algebraica y seguidamente dar enter

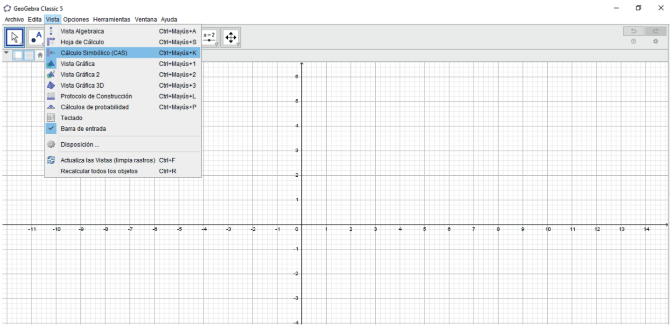


El resultado obtenido se observa a continuación tomando en consideración que pulsando en la cuadrícula se puede mover la imagen

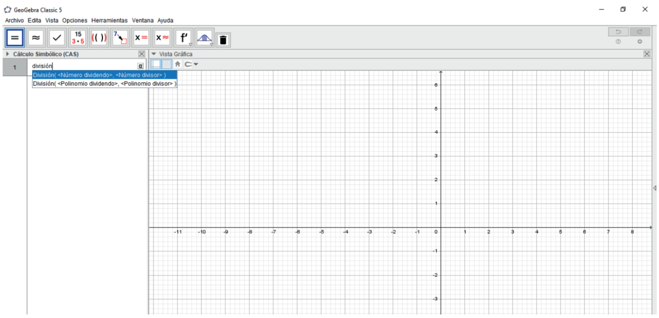

Classic - GeoGebra
https://www.geogebra.org/classic
80%
Buscar
Entrada...

Anexo 5: cálculo simbólico de Geogebra Cas

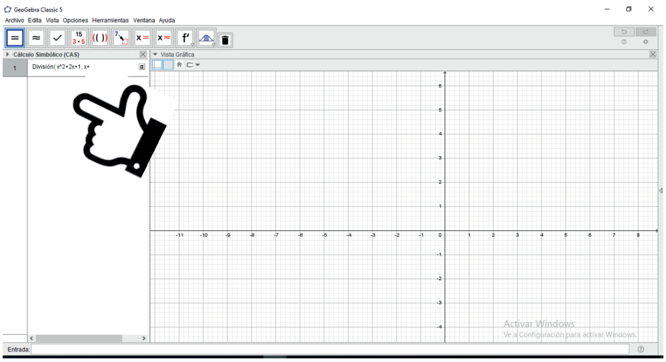
En la pestaña vista seleccionamos la opción CAS



Ingresamos la función división en la entrada activada de CAS



Ingresamos el dividendo y el divisor en la función mencionada. Se debe tomar en cuenta que para elevar a una potencia se usa el símbolo “^”



El resultado obtenido es el mismo que el encontrado mediante el procedimiento manual.

La primera parte indica el cociente y la segunda parte corresponde al residuo.